Stabilisation de la formule des traces tordue II: intégrales orbitales et endoscopie sur un corps local non-archimédien; définitions et énoncés des résultats

Jean-Loup Waldspurger

Stabilisation de la formule des traces tordue II : intégrales orbitales et endoscopie sur un corps local non-archimédien ; définitions et énoncés des résultats

J.-L. Waldspurger

23 janvier 2014

Introduction

Ceci est le deuxième d'une série d'articles, en collaboration avec C. Moeglin, visant à établir la stabilisation de la formule des traces tordue. On y donne les définitions des termes locaux intervenant dans la partie géométrique de cette formule, sous la restriction que le corps local de base F est supposé non-archimédien. On énonce les principaux résultats concernant ces objets. Les deux plus importants, à savoir les théorèmes 1.10 et 1.16, ainsi que quelques autres, ne seront pas démontrés ici mais seulement énoncés comme assertions à prouver. Le théorème 1.10 sera déduit dans l'article suivant des résultats d'Arthur. La preuve du théorème 1.16 nécessite un argument global, elle ne sera donnée que beaucoup plus tard.

On utilise les notations introduites dans le premier article [I]. Considérons un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ comme dans celui-ci. Le terme G est un groupe réductif connexe sur F, $\tilde{G}$ est un espace tordu sous G et $\mathbf{a}$ est un élément de $H^1(\Gamma_F; Z(\hat{G}))$, qui détermine un caractère ω de $G(F)$. Dans la première section, on commence par définir les objets de base, à savoir, pour un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$, les intégrales orbitales pondérées $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$ et leurs avatars ω-équivariants $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$. Pour cela, nous suivons bien sûr Arthur mais nous modifions un peu ses définitions. Expliquons cela en considérons le cas $\tilde{G} = G = SO(7)$, $\mathbf{a} = 1$, $\tilde{M} = M = GL(2) \times SO(3)$. Nous ne changeons rien aux définitions d'Arthur pour un élément $\gamma \in M(F)$ qui est G-équisingulier, c'est-à-dire tel que $G_\gamma = M_\gamma$ (on note par exemple G_γ la composante neutre du centralisateur de γ dans G). Le changement concerne les éléments non-équisinguliers, par exemple l'élément $\gamma = 1$. Soit (B, T) une paire de Borel de G définie sur F, telle que M soit standard pour cette paire. Notons $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{t}$ les algèbres de Lie de G et T et notons $\Sigma(T)$ l'ensemble des racines de T dans $\mathfrak{g}$. On identifie $\mathfrak{t}(F)$ à F^3 de sorte que $\Sigma(T)$ s'identifie à l'ensemble $\{\pm\alpha_{i,\pm j}; 1 \leq i < j \leq 3\} \cup \{\pm\alpha_i; 1 \leq i \leq 3\}$ de formes linéaires sur $\mathfrak{t}(F)$, où

- $\alpha_{i,j}(x_1, x_2, x_3) = x_i - x_j$;
- $\alpha_{i,-j}(x_1, x_2, x_3) = x_i + x_j$;
- $\alpha_i(x_1, x_2, x_3) = x_i$.

Les racines dans M sont $\pm\alpha_{1,2}$ et $\pm\alpha_3$. Introduisons l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}_M$ du centre de M. Alors $\mathfrak{a}_M(F) = \{H(x); x \in F\}$, où $H(x) = (x, x, 0)$. Les racines ci-dessus se restreignent à ce sous-espace en 0, $\pm\beta$ ou $\pm 2\beta$, où $\beta(H(x)) = x$. On pose

$$l_\beta(x) = |e^{\beta(H(x))} - e^{-\beta(H(x))}|_F, \ l_{2\beta}(x) = |e^{2\beta(H(x))} - e^{-2\beta(H(x))}|_F.$$

Pour $x \neq 0$ mais assez voisin de 0, l'élément $exp(H(x)) \in M(F)$ est G-équisingulier. Pour $f \in C_c^\infty(G(F))$, l'intégrale orbitale pondérée $J_M^G(exp(H(x)), f)$ est bien définie, ainsi que $J_G^G(exp(H(x)),f)=I^G(exp(H(x)),f)$. Arthur montre qu'il existe un réel k_M^G, nécessairement unique, de sorte que, pour tout f, l'expression

$$J_M^G(exp(H(x)),f)+k_M^G l_\beta(x)I^G(exp(H(x)),f)$$

ait une limite quand x tend vers 0. Il définit $J_M^G(1,f)$ comme étant cette limite. Pour des raisons de compatibilité à l'induction, il nous semble préférable de ne pas privilégier la racine indivisible β mais de répartir plutôt le coefficient k_M^G sur les deux racines β et 2β. Pour cela, considérons l'ensemble des éléments de $\Sigma(T)$ qui se restreignent en un multiple entier de 2β. Ce sont $\pm\alpha_{1,2}$, $\pm\alpha_{1,-2}$ et $\pm\alpha_3$. C'est le système de racines d'un sous-groupe $G_{2\beta}=SO(4)\times SO(3)$ de G qui contient M. On a de même un nombre réel $k_M^{G_{2\beta}}$. Considérons l'expression

$$J_M^G(exp(H(x)),f)+\Big((k_M^G-k_M^{G_{2\beta}})l_\beta(x)+k_M^{G_{2\beta}}l_{2\beta}(x)\Big)I^G(exp(H(x)),f).$$

Elle a encore une limite quand x tend vers 0, qui est égale à la précédente, plus $k_M^{G_{2\beta}}log(|2|_F)I^G(1,f)$. C'est cette limite que nous notons $J_M^G(1,f)$.

On s'aperçoit que le procédé admet diverses variantes. Par exemple, fixons un rationnel $b>0$. On peut remplacer dans la formule ci-dessus $l_\beta(x)$ et $l_{2\beta}(x)$ par $l_\beta(bx)$ et $l_{2\beta}(bx)$. Il y a encore une limite, égale à la précédente plus $k_M^G log(|b|_F)I^G(1,f)$. On la note $J_M^G(1,B,f)$, B désignant la fonction constante sur $\Sigma(T)$ de valeur b. Plus subtilement, considérons la fonction B sur $\Sigma(T)$ définie par $B(\pm\alpha_{i,j})=1$, $B(\pm\alpha_{i,-j})=1$, $B(\pm\alpha_i)=1/2$. Cette fonction est proportionnelle au carré de la longueur usuelle. Pour $\alpha\in\Sigma(T)$, $\frac{\alpha}{B(\alpha)}$ est encore une forme linéaire sur $\mathfrak{t}(F)$. Les restrictions de ces formes à $\mathfrak{a}_M(F)$ sont encore 0, $\pm\beta$, $\pm2\beta$. Considérons l'ensemble des α telles que la restriction de $\frac{\alpha}{B(\alpha)}$ soit un multiple entier de 2β. Il est formé de $\pm\alpha_{1,2}$, $\pm\alpha_{1,-2}$, α_1, α_2, α_3. C'est le système de racines d'un groupe $G_{2\beta,B}=SO(5)\times SO(3)$. Ce n'est plus un sous-groupe de G, mais il contient encore M. L'expression

$$J_M^G(exp(H(x)),f)+\Big((k_M^G-k_M^{G_{2\beta,B}})l_\beta(x)+k_M^{G_{2\beta,B}}l_{2\beta}(x)\Big)I^G(exp(H(x)),f)$$

a encore une limite quand x tend vers 0. On la note $J_M^G(1,B,f)$.

Ainsi, pour certaines fonctions B sur $\Sigma(T)$, on peut définir $J_M^G(1,B,f)$, ainsi que son avatar invariant $I_M^G(1,B,f)$. La considération de ces diverses définitions est utile pour notre propos. Expliquons pourquoi en revenant au cas général. Considérons une donnée endoscopique $\mathbf{G}'=(G',\mathcal{G}',\tilde{s})$ de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$. Soient η un élément semi-simple de $\tilde{G}(F)$, ϵ un élément semi-simple de $\tilde{G}'(F)$, supposons que ces deux éléments se correspondent par la correspondance endoscopique usuelle. Fixons des formes quasi-déployées G_η^* et $G_\epsilon'^*$ de G_η et G'_ϵ et des paires de Borel définies sur F dans ces deux groupes, dont on note les tores T_η et T'_ϵ. On note $\Sigma(T_\eta)$ et $\Sigma(T'_\epsilon)$ les ensembles de racines de T_η dans G_η^* et de T'_ϵ dans $G_\epsilon'^*$. Il y a un isomorphisme naturel $\mathfrak{t}_\eta\simeq\mathfrak{t}'_\epsilon$. Mais il n'identifie pas $\Sigma(T'_\epsilon)$ à un sous-ensemble de $\Sigma(T_\eta)$. Par contre, il existe une fonction $B_\epsilon^{\tilde{G}}:\Sigma(T'_\epsilon)\to\mathbb{Q}_{>0}$ telle que l'ensemble $\{\frac{\alpha}{B_\epsilon^{\tilde{G}}(\alpha)};\alpha\in\Sigma(T'_\epsilon)\}$ s'identifie à un sous-ensemble de $\Sigma(T_\eta)$. Soient $\tilde{M}$ et $\tilde{M}'$ des espaces de Levi de $\tilde{G}$ et $\tilde{G}'$ qui se correspondent, supposons $\eta\in\tilde{M}(F)$ et $\epsilon\in\tilde{M}'(F)$. Soit enfin $\gamma\in\tilde{M}(F)$ de partie semi-simple η. "Stabiliser" la distribution $f\mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)$ revient à établir une relation entre celle-ci et d'autres distributions vivant sur des espaces endoscopiques. Parmi ces dernières, il y a en première approximation les distributions

$f' \mapsto I_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'}(\delta, f')$, où δ est un élément de $\tilde{M}'(F)$ de partie semi-simple ϵ. Il s'avère qu'il est plus pertinent d'utiliser la distribution $f' \mapsto I_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'}(\delta, B_{\epsilon}^{\tilde{G}}, f')$.

Dans la suite de la première section, on définit les avatars stables et endoscopiques des intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes. Le théorème 1.10, qui ne concerne que le cas où $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure, affirme que les avatars stables sont bel et bien stables. Le théorème 1.16 affirme l'égalité des intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes avec leurs avatars endoscopiques, c'est-à-dire une égalité $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$ avec des notations proches de celles d'Arthur. Encore une fois, ces théorèmes ne sont ici qu'énoncés comme des assertions à prouver.

Dans la deuxième section, on développe pour nos intégrales la théorie des germes de Shalika. On pourrait espérer que ceux-ci permettent de ramener les théorèmes 1.10 et 1.16 aux mêmes théorèmes restreints aux distributions à support fortement régulier dans $\tilde{G}(F)$ (c'est-à-dire de prouver que, si ces théorèmes sont vérifiés pour de telles distributions, ils sont vrais pour toute distribution). Cet espoir est vain, pour autant que je le sache, car on n'a pas assez de renseignements sur les germes. Ceux-ci permettent toutefois de prouver que les théorèmes, restreints aux distributions à support fortement régulier dans $\tilde{G}(F)$, entraînent les mêmes théorèmes pour les distributions à support seulement $\tilde{G}$-équisingulier.

Dans la troisième section, on étudie plus finement la définition des intégrales orbitales pondérées ω-équivariante. Par définition, une intégrale $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$ est limite de combinaisons linéaires d'intégrales $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(a\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$, où $a \in A_{\tilde{M}}(F)$ est en position générale et tend vers 1 et $\tilde{L}$ est un espace de Levi contenant $\tilde{M}$. On change légèrement de point de vue et on étudie plutôt le germe en 1 de la fonction $a \mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(a\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$. On obtient un développement de cette fonction en termes de fonctions assez élémentaires de a. C'est ce développement qui, dans l'article suivant, nous permettra de ramener les théorèmes 1.10 et 1.16 aux mêmes théorèmes restreints aux distributions à support fortement régulier dans $\tilde{G}(F)$.

Dans la dernière section, on traite le cas non ramifié, où on étudie seulement les intégrales orbitales pondérées non ω-équivariantes de la fonction caractéristique d'un espace hyperspécial. Le principal résultat est que le lemme fondamental pondéré, qui est connu grâce à Ngo Bao Chau pour les distributions à support fortement régulier dans $\tilde{G}(F)$, est vérifié pour toute distribution. Cela utilise les résultats des sections 2 et 3.

Pour conclure cette introduction, il faut dire que cet article doit tout aux travaux antérieurs d'Arthur sur ce sujet et que, si on ne le cite pas à chaque ligne, c'est seulement pour ne pas lasser le lecteur.

1 Intégrales orbitales pondérées

1.1 Les hypothèses

Dans tout l'article, le corps de base F est local, de caractéristique nulle et non-archimédien. On note p la caractéristique résiduelle de F. On considère des triplets $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ comme dans [I]. Le terme G est un groupe réductif connexe défini sur F, $\tilde{G}$ est un espace tordu sur G, $\mathbf{a}$ est un élément de $H^1(W_F, Z(\hat{G}))$ qui détermine un caractère ω de $G(F)$. On suppose

• $\tilde{G}(F) \neq \emptyset$;

• l'automorphisme θ de $Z(G)$ est d'ordre fini ;

• le caractère ω est unitaire.

On aura à prouver des assertions concernant un tel triplet. On raisonne par récurrence sur l'entier $dim(G_{SC})$.

Pour démontrer une assertion concernant un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure, on suppose connues toutes les assertions concernant des triplets $(G', \tilde{G}', \mathbf{a}')$ quasi-déployés et à torsion intérieure tels que $dim(G'_{SC}) < dim(G_{SC})$.

Pour démontrer une assertion concernant un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ qui n'est pas quasi-déployé et à torsion intérieure, on suppose connues toutes les assertions concernant des triplets $(G', \tilde{G}', \mathbf{a}')$ quasi-déployés et à torsion intérieure tels que $dim(G'_{SC}) \leq dim(G_{SC})$. On suppose connues toutes les assertions concernant des triplets $(G', \tilde{G}', \mathbf{a}')$ quelconques tels que $dim(G'_{SC}) < dim(G_{SC})$.

Beaucoup d'assertions concernant un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ sont relatives à un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$. On supposera connues toutes les assertions concernant ce même triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$, relatives à un espace de Levi $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$ tel que $\tilde{L} \neq \tilde{M}$.

1.2 Définition des intégrales pondérées d'après Arthur

Soit $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ un triplet comme en 1.1. Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. On doit fixer une mesure sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. Pour ce faire, introduisons la paire de Borel épinglée $\mathcal{E}^* = (B^*, T^*, (E^*_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$ de G, cf. [I] 1.2. Elle est munie d'une action $\sigma \mapsto \sigma_{G^*}$ du groupe de Galois Γ_F et d'un automorphisme θ^*. Le groupe de Weyl W agit sur T^*. On fixe une forme quadratique définie positive sur $X_*(T^*) \otimes \mathbb{R}$, invariante par les actions de W et de Γ_F et par θ^*. En fixant $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$ et en identifiant $\mathcal{E}^*$ à une paire de Borel épinglée contenue dans $\tilde{P}$ et dont le tore est contenu dans $\tilde{M}$, $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ s'identifie à un sous-espace de $X_*(T^*) \otimes \mathbb{R}$. Par restriction, on obtient une forme quadratique définie positive sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. Elle ne dépend pas des choix. De cette forme se déduit la mesure cherchée. On fixe un sous-groupe compact maximal spécial K de $G(F)$ en bonne position relativement à M. On fixe aussi une mesure de Haar sur $G(F)$.

Introduisons la notion d'élément $\tilde{G}$-équisingulier de $\tilde{M}$. Soit $\gamma \in \tilde{M}$, notons η sa partie semi-simple. On a

(1) les égalités $M_\gamma = G_\gamma$ et $M_\eta = G_\eta$ sont équivalentes.

Preuve. Ces égalités sont équivalentes aux inclusions $G_\gamma \subset M$, resp. $G_\eta \subset M$. Ecrivons $\gamma = u\eta$, où u est un élément unipotent de M_η. On a les égalités $G_\gamma = (G_\eta)_u$ et $M_\gamma = (M_\eta)_u$. Si $G_\eta \subset M$, on a $G_\gamma \subset G_\eta \subset M$, donc $G_\gamma = M_\gamma$. Inversement, supposons $M_\gamma = G_\gamma$. Posons $H = G_\eta$ et $L = M_\eta$. Alors L est un Levi de H et u est un élément unipotent de L tel que $H_u \subset L$. On veut en déduire que $L = H$. Mais soit $Q \in \mathcal{P}(L)$. Si $L \neq H$, le radical unipotent U_Q est non trivial. L'automorphisme ad_u agit de façon unipotente sur ce radical, ce qui implique que son ensemble de points fixes dans U_Q est non trivial. Cet ensemble est inclus dans H_u, ce qui contredit l'inclusion $H_u \subset L$. $\square$

On appelle élément $\tilde{G}$-équisingulier de $\tilde{M}$ un élément γ vérifiant les égalités (1).

Soit $\gamma \in \tilde{M}(F)$. Fixons une mesure de Haar sur le groupe $M_\gamma(F)$. Arthur définit dans [A1] une distribution $f \mapsto J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$ sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$. On va rappeler sa définition. Nous la modifierons dans le paragraphe suivant, c'est pourquoi nous affecterons des exposants *Art* à certains objets définis par Arthur.

Si ω n'est pas trivial sur $M_\gamma(F)$, on pose $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$ pour tout f. On suppose désormais ω trivial sur $M_\gamma(F)$.

Premier cas : on suppose que γ est $\tilde{G}$-équisingulier. Arthur définit pour tout $g \in G(F)$ une $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille $(v_{\tilde{P}}(g;\lambda))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$ (λ est une variable dans $i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$). Comme de toute $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille, il s'en déduit une fonction $v_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(g;\lambda)$. On pose $v_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(g) = v_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(g;0)$. La fonction $g \mapsto v_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(g)$ est la fonction "poids". Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, on pose

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f) = D^{\tilde{G}}(\gamma)^{1/2}\int_{M_\gamma(F)\backslash G(F)} \omega(g)f(g^{-1}\gamma g)v_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(g)\,dg.$$

Cas général. On écrit $\gamma = u\eta$, où η est la partie semi-simple de γ et u est un unipotent dans $M_\eta(F)$. Notons $\Sigma(A_{\tilde{M}})$ l'ensemble des racines de $A_{\tilde{M}}$ dans G (toutes les racines, pas seulement les indivisibles). Notons $\Sigma_{ind}(A_{M_\eta})$ l'ensemble des racines indivisibles de A_{M_η} dans G_η. La restriction définit une application naturelle $\beta \mapsto \beta_{\tilde{M}}$ de $\Sigma_{ind}(A_{M_\eta})$ dans $\Sigma(A_{\tilde{M}}) \cup \{0\}$. Pour tout $\beta \in \Sigma_{ind}(A_{M_\eta})$, Arthur définit un réel $\rho^{Art}(\beta,u)$ et une "coracine" $\check{\beta} \in \mathcal{A}_{M_\eta}$. Pour $\alpha \in \Sigma(A_{\tilde{M}})$, pour $a \in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale et pour $\lambda \in i\mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}$, posons

$$r_\alpha^{Art}(\gamma,a;\lambda) = \prod_{\beta\in\Sigma_{ind}(A_{M_\eta});\beta_{\tilde{M}}=\alpha} |\alpha(a)-\alpha(a)^{-1}|_F^{<\lambda,\rho^{Art}(\beta,u)\check{\beta}_{\tilde{M}}>}.$$

On définit ensuite une $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille $(r_{\tilde{P}}^{Art}(\gamma,a;\lambda))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$ par

$$r_{\tilde{P}}^{Art}(\gamma,a;\lambda) = \prod_{\alpha>_P 0} r_\alpha^{Art}(\gamma,a;\lambda/2)$$

pour $\lambda \in i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$, où α parcourt les éléments de $\Sigma(A_{\tilde{M}})$ qui sont "positifs" pour P. On déduit de cette $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille une fonction $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G},Art}(\gamma,a;\lambda)$ et on pose $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G},Art}(\gamma,a) = r_{\tilde{M}}^{\tilde{G},Art}(\gamma,a;0)$.

Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, considérons la fonction

$$(2)\qquad a \mapsto \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} r_{\tilde{M}}^{\tilde{L},Art}(\gamma,a)J_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(a\gamma,\omega,f).$$

Pour a en position générale, elle est bien définie : on a $G_{a\gamma} = M_{a\gamma} = M_\gamma$ et les intégrales orbitales pondérées $J_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(a\gamma,\omega,f)$ sont définies d'après le premier cas ci-dessus. Arthur montre que la fonction (2) a une limite quand a tend vers 1 (Arthur traite le cas $\omega = 1$ mais sa preuve s'étend sans changement au cas général). Notons $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G},Art}(\gamma,\omega,f)$ la limite de la fonction (2). C'est l'intégrale orbitale pondérée telle que définie par Arthur. Notons que, dans le cas où $M_\gamma = G_\gamma$, on retrouve celle donnée plus haut.

Remarque. On vérifie que $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G},Art}(\gamma,\omega,f) = 0$ si ω n'est pas trivial sur $Z_M(\gamma;F)$ tout entier.

On aura besoin d'un résultat un peu plus précis. On définit une distance d au voisinage de 1 dans $A_{\tilde{M}}(F)$ de la façon suivante. On fixe une norme $|.|$ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}(F)$. On fixe des voisinages U de 1 dans $A_{\tilde{M}}(F)$ et $\mathfrak{u}$ de 0 dans $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}(F)$ tels que l'exponentielle soit bijective de $\mathfrak{u}$ dans U. Pour $a \in U$, on écrit $a = exp(H)$, avec $h \in \mathfrak{u}$, et on pose $d(a) = |H|$. On a alors

(3) il existe $r > 0$ tel que, pour tout $\gamma \in \tilde{M}(F)$, tout $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, il existe $C > 0$ de sorte que

$$|J_{\tilde{M}}^{\tilde{G},Art}(\gamma,\omega,f) - \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} r_{\tilde{M}}^{\tilde{L},Art}(\gamma,a)J_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(a\gamma,\omega,f)| \leq Cd(a)^r$$

pour tout $a \in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale et assez proche de 1.

Preuve. Un examen attentif de la preuve d'Arthur montre qu'il suffit d'améliorer son lemme 6.1 de [A1]. Reprenons les notations de ce lemme dans la situation simplifiée qui nous concerne : l'ensemble de places S est réduit à un élément, on a $F_S = F$ et les v disparaissent. On considère une famille d'éléments de l'espace $\mathcal{P}^+(\Omega)$ dépendant d'un paramètre a parcourant un voisinage de 1 dans $A_{\tilde{M}}(F)$. On note $p[a] = \oplus_{\omega \in \Omega} p[a]_\omega$ l'élément de cette famille paramétré par a. Le terme $p[a]_\omega$ est un polynôme sur F^d à valeurs dans un espace V_ω de dimension finie sur F, muni d'une norme $||.||$. On suppose que l'application $(a,x) \to p[a]_\omega(x)$ est la restriction (au voisinage de $a=1$) d'un polynôme défini sur $A_{\tilde{M}}(F) \times F^d$. Pour $x \in F^d$, on pose

$$\lambda_{p[a]}(x) = \prod_{\omega \in \Omega} |log(||p[a]_\omega(x)||)|.$$

Arthur montre que, pour tout $\phi \in C_c^\infty(F^d)$, l'application

$$a \mapsto \lambda_{p[a]}(\phi) = \int_{\mathcal{O}} \phi(x) \lambda_{p[a]}(x)\, dx$$

est continue. Pour obtenir (3), on doit montrer qu'il existe $r > 0$ et $C > 0$ de sorte que

$$|\lambda_{p[a]}(\phi) - \lambda_{p[1]}(\phi)| \leq C d(a)^r.$$

On veut de plus que r ne dépende pas de ϕ et, si on fixe un entier D et que l'on impose que tous les $p[a]_\omega$ sont de degré au plus D, que r ne dépende pas non plus de la famille de polynômes. Il suffit pour cela de reprendre la fin de la preuve du lemme 6.1. On pose $p^0 = p[1]$. En choisissant un paramètre auxiliaire ϵ, Arthur montre que $|\lambda_{p[a]}(\phi) - \lambda_{p^0}(\phi)|$ est majoré par la somme de trois expressions (7.2), (7.3) et (7.4). La relation (7.1) nous dit que le terme (7.3) est majoré par $C_1 \epsilon^{r_1}$, où C_1 et r_1 vérifient les conditions requises. Le terme (7.2) vérifie une majoration analogue pourvu que l'on ait l'inclusion $\Gamma(p^0, \epsilon) \subset \Gamma(p[a], 2\epsilon)$. Rappelons que Ω est un ensemble fini, que Γ est un sous-ensemble compact de F^d et que $\Gamma(p[a], \epsilon)$ est la réunion sur les $\omega \in \Omega$ des ensembles des $x \in \Gamma$ tels que $||p[a]_\omega(x)|| < \epsilon$. Puisque les $p[a]_\omega$ sont polynomiaux en a, il existe C_2 tel que

$$|||p[a]_\omega(x)|| - ||p^0_\omega(x)||| < C_2 d(a)$$

pour tout a voisin de 1, tout $x \in \Gamma$ et tout $\omega \in \Omega$. L'inclusion $\Gamma(p^0, \epsilon) \subset \Gamma(p[a], 2\epsilon)$ est vérifiée pourvu que $C_2 d(a) < \epsilon$. Imposons plutôt $2C_2 d(a) < \epsilon$. Le même calcul montre que l'on a l'inclusion en sens inverse $\Gamma(p[a], \epsilon/2) \subset \Gamma(p^0, \epsilon)$. Le terme (7.4) est de la forme

$$C_3 \int_{\Gamma - \Gamma(p^0, \epsilon)} |\lambda_{p[a]}(x) - \lambda_{p^0}(x)|\, dx.$$

Sur le domaine d'intégration, on a $||p^0_\omega(x)|| > \epsilon$ pour tout ω et, d'après l'inclusion ci-dessus, on a aussi $||p[a]_\omega(x)|| > \epsilon/2$. Ecrivons $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_\ell\}$. On peut écrire

$$\lambda_{p[a]}(x) - \lambda_{p^0}(x) = \sum_{k=1,...,\ell} \left(\prod_{i=1,...,k-1} |log(||p[a]_{\omega_i}(x)||)| \right)$$

$$(|log(||p[a]_{\omega_i}(x)||)| - |log(||p[a]_{\omega_i}(x)||)|) \left(\prod_{j=k+1,...,\ell} |log(||p^0_{\omega_i}(x)||)| \right).$$

On déduit des inégalités précédentes que $|\lambda_{p[a]}(x)-\lambda_{p^0}(x)|$ est essentiellement borné par la somme sur les ω de

$$|log(\epsilon/2)|^{|\Omega|-1}|log(||p[a]_\omega(x)||)-log(||p^0_\omega(x)||)|.$$

Le dernier terme est égal à la valeur absolue de

$$log(\frac{||p[a]_\omega(x)||}{||p^0_\omega(x)||}).$$

On peut écrire $p[a]_\omega(x)=p^0_\omega(x)+q(a,x)$, où $q(a,x)$ est un polynôme en a et x qui est nul en $a=1$. On a une majoration $||q(a,x)||\leq C_4d(a)$ pour tout $x\in\Gamma$. Puisque $||p^0_\omega(x)||>\epsilon$, on obtient

$$|\frac{||p[a]_\omega(x)||}{||p^0_\omega(x)||}-1|\leq C_4d(a)\epsilon^{-1}.$$

Renforçons la minoration imposée à ϵ en supposant $d(a)^{1/2}\leq\epsilon$ (c'est plus fort que $2C_2d(a)<\epsilon$ pour a proche de 1). Alors

$$|\frac{||p[a]_\omega(x)||}{||p^0_\omega(x)||}-1|\leq C_4d(a)^{1/2}$$

d'où

$$|log(\frac{||p[a]_\omega(x)||}{||p^0_\omega(x)||})|\leq C_5d(a)^{1/2}$$

pour une constante C_5 convenable. Alors le terme (7.4) est essentiellement majoré par

$$C_3C_5|\Omega||log(\epsilon/2)|^{|\Omega|-1}d(a)^{1/2}.$$

On fixe maintenant $\epsilon=d(a)^{1/2}$. Le terme ci-dessus est majoré par

$$C_6d(a)^{r_2}$$

pour tout réel $r_2<1/2$ et pour une constante C_6 convenable. Les majorations des termes (7.2) et (7.3) deviennent de la forme $C_1d(a)^{r_1/2}$. En prenant pour r l'inf de r_2 et $r_1/2$, on a obtenu la majoration cherchée. $\square$

1.3 Propriétés des termes $\rho^{Art}(\beta,u)\check{\beta}$

On suppose dans ce paragraphe et le suivant qu'il n'y a pas de torsion, c'est-à-dire $\tilde{G}=G$. On considère un Levi M de G et un élément unipotent $u\in M(F)$. Comme on l'a rappelé, Arthur définit pour toute racine $\beta\in\Sigma_{ind}(A_M)$ un réel $\rho^{Art}(\beta,u)$ et une coracine $\check{\beta}$. Fixons une paire de Borel (B,T) de G telle que M soit standard pour cette paire. Fixons une extension finie F' de F telle que (B,T) soit définie sur F' et que G soit déployé sur F'. Plaçons-nous sur le corps de base F'. Le tore $Z(M)^0$ est alors l'analogue de A_M. Pour tout $\beta'\in\Sigma_{ind}(Z(M)^0)$, on définit le réel $\rho^{Art}(\beta',u)$ et une coracine $\check{\beta}'\in X_*(Z(M)^0)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$. De l'inclusion $A_M\subset Z(M)^0$ se déduisent des applications de restriction

$$\begin{array}{ccc}\Sigma_{ind}(Z(M)^0)&\to&\Sigma(A_M)\\ \beta'&\mapsto&\beta'_{A_M}\end{array},\quad \begin{array}{ccc}X_*(Z(M)^0)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}&\to&\mathcal{A}_M\\ H&\mapsto&H_{\mathcal{A}_M}\end{array}.$$

Remarquons qu'une racine indivisible de $Z(M)^0$ ne se restreint pas forcément en une racine indivisible.

Pour $\beta\in\Sigma_{ind}(A_M)$, on a l'égalité

(1) $\rho^{Art}(\beta,u)\check{\beta}=\sum_{n\geq 1}\sum_{\beta';\beta'_{A_M}=n\beta}\rho^{Art}(\beta',u)\check{\beta}'_{A_M}$.

Preuve. Soit $P\in\mathcal{P}(M)$ et soit ω un poids de A_M qui est dominant pour P (c'est la notation d'Arthur ; il ne s'agit pas de notre caractère ω que nous oublions pour un temps). Notons $\mathcal{U}$ l'orbite géométrique de u dans M. Arthur définit une fonction $W_\omega(a,\pi)$ sur $A_M\times\mathcal{U}U_P$, à valeurs dans un espace de dimension finie sur $\bar{F}$(cf. [A1] 3.8 ; on considère ici le cas $P=\bar{P}_1$ avec les notations de cette référence). Le groupe M agit sur cet espace et la fonction est équivariante pour l'action de M par conjugaison sur $\mathcal{U}U_P$ et cette action sur l'espace d'arrivée. Arthur montre que cette fonction est polynomiale et n'est pas identiquement nulle en $a=1$ ([A1] corollaire 4.3). Elle est donc non nulle sur $\{1\}\times\mathcal{O}$, où $\mathcal{O}$ est un ouvert de Zariski de $\mathcal{U}U_P$, qui est dense et invariant par conjugaison par M. En se plaçant sur F', on a de même une fonction $W'_\omega(a',\pi)$ sur $Z(M)^0\times\mathcal{U}U_P$, qui est polynomiale et est non nulle sur $\{1\}\times\mathcal{O}'$, où $\mathcal{O}'$ est un ouvert de Zariski de $\mathcal{U}U_P$, qui est dense et invariant par conjugaison par M. Sa restriction à $A_M\times\mathcal{U}U_P$ vérifie donc la même propriété. Or il résulte de la définition (3.8) de [A1] que, pour $(a,\pi)\in A_M\times\mathcal{U}U_P$, on a l'égalité

$$W_\omega(a,\pi)=W'_\omega(a,\pi)\frac{Q(a)}{Q'(a)},$$

où

$$Q(a)=\prod_{\beta\in\Sigma_{ind}(A_M),\beta>_P0}(\beta(a)-\beta(a)^{-1})^{\rho^{Art}(\beta,u)<\omega,\check{\beta}>},$$

$$Q'(a)=\prod_{\beta'\in\Sigma_{ind}(Z(M)^0),\beta'>_P0}(\beta'(a)-\beta'(a)^{-1})^{\rho^{Art}(\beta',u)<\omega,\check{\beta}'>}.$$

Les propriétés des deux fonctions W_ω et W'_ω entraînent que la fraction rationnelle $\frac{Q(a)}{Q'(a)}$ n'a ni zéro, ni pôle en $a=1$. Remarquons que l'on peut récrire

$$Q'(a)=\prod_{\beta\in\Sigma_{ind}(A_M),\beta>_P0}\prod_{n\geq 1}\prod_{\beta';\beta'_{A_M}=n\beta}(\beta'(a)-\beta'(a)^{-1})^{\rho^{Art}(\beta',u)<\omega,\check{\beta}'>}.$$

Si $\beta'_{A_M}=n\beta$, la fonction

$$\frac{\beta'(a)-\beta'(a)^{-1}}{\beta(a)-\beta(a)^{-1}}$$

n'a ni zéro, ni pôle en $a=1$. Posons

$$Q''(a)=\prod_{\beta\in\Sigma_{ind}(A_M),\beta>_P0}(\beta(a)-\beta(a)^{-1})^{<\omega,X(\beta)>},$$

où $X(\beta)$ est le membre de droite de (1). Alors $\frac{Q'(a)}{Q''(a)}$ n'a ni zéro, ni pôle en $a=1$. Donc $\frac{Q(a)}{Q''(a)}$ a la même propriété. Cela équivaut à $\rho^{Art}(\beta,u)<\omega,\check{\beta}>=<\omega,X(\beta)>$ pour tout β. Cela étant vrai pour tout poids dominant ω, cela entraîne l'égalité (1) cherchée. $\square$

Soit $L\in\mathcal{L}(M)$. On sait définir la classe de conjugaison (géométrique) induite de M à L de la classe de conjugaison de u. Soit $R=MU_R\in\mathcal{P}^L(M)$. Alors l'intersection de cette classe de conjugaison et de uU_R est Zariski-dense dans cet ensemble. Soit u' dans cette classe. On peut définir des termes $\rho^{Art}(\beta',u')$ et $\check{\beta}'\in\mathcal{A}_L$ pour $\beta'\in\Sigma_{ind}(A_L)$. On a des applications de restriction

$$\begin{array}{ccc}\Sigma_{ind}(A_M) & \to & \Sigma(A_L)\cup\{0\}\\ \beta & \mapsto & \beta_L\end{array},\quad \begin{array}{ccc}\mathcal{A}_M & \to & \mathcal{A}_L\\ H & \mapsto & H_L\end{array}.$$

Remarquons que la restriction d'une racine indivisible de A_M peut être nulle ou divisible. Pour $\beta'\in\Sigma_{ind}(A_L)$, on a l'égalité

(2) $\rho^{Art}(\beta',u')\check{\beta}'=\sum_{n\geq 1}\sum_{\beta\in\Sigma_{ind}(A_M);\beta_L=n\beta'}\rho^{Art}(\beta,u)\check{\beta}_L$.

Preuve. On fixe un sous-groupe parabolique $P'\in\mathcal{P}(L)$ et un poids ω de A_L qui est dominant pour P'. On fixe un sous-groupe parabolique $P\in\mathcal{P}(M)$ contenu dans P'. On définit comme ci-dessus des fonctions W_ω sur $A_M\times\mathcal{U}U_P$ et W'_ω sur $A_L\times\mathcal{U}'U_{P'}$, où $\mathcal{U}'$ est l'orbite géométrique de u'. Comme plus haut, elles sont polynomiales et non nulles sur $\{1\}\times\mathcal{O}$, respectivement sur $\{1\}\times\mathcal{O}'$, où $\mathcal{O}$ est un ouvert de Zariski de $\mathcal{U}U_P$ qui est dense et invariant par conjugaison par M et $\mathcal{O}'$ est un ouvert de Zariski de $\mathcal{U}'U_{P'}$, qui est dense et invariant par conjugaison par L. Il résulte de la définition de u' que $\mathcal{O}\cap\mathcal{O}'\neq\emptyset$. Donc les deux fonctions sont toutes deux non nulles sur $\{1\}\times(\mathcal{O}\cap\mathcal{O}')$. Pour $a\in A_M$, définissons $Q(a)$ comme ci-dessus et, pour $a'\in A_L$, posons

$$Q'(a')=\prod_{\beta'\in\Sigma_{ind}(A_L),\beta'>_{P'}0}(\beta'(a')-\beta'(a')^{-1})^{\rho^{Art}(\beta',u')<\omega,\check{\beta}'>}.$$

Le même argument que plus haut montre que la fraction rationnelle $\frac{Q(a')}{Q'(a')}$ sur A_L n'a ni zéro, ni pôle en $a'=1$. Remarquons que l'on peut supprimer de la définition de Q les β dont la restriction à A_L est nulle : pour ceux-là, on a $<\omega,\check{\beta}>=0$. Comme plus haut, si β se restreint en $n\beta'$, la fonction

$$\frac{\beta(a')-\beta(a')^{-1}}{\beta'(a')-\beta'(a')^{-1}}$$

n'a ni zéro, ni pôle en $a'=1$. En notant $Y(\beta')$ la différence entre le membre de gauche de (2) et celui de droite, on obtient alors que la fonction $\frac{Q(a')}{Q'(a')}$ a la même singularité en $a=1$ que la fonction

$$\prod_{\beta'\in\Sigma_{ind}(A_L),\beta'>_P0}(\beta'(a')-\beta'(a')^{-1})^{<\omega,Y(\beta')>}.$$

Donc ce produit n'a lui-même ni zéro, ni pôle en $a'=1$. Cela entraîne $Y(\beta')=0$ pour tout β'. $\square$

1.4 Définition d'un nouveau terme $\rho(\beta,u)$

On conserve la situation du début du paragraphe précédent et on fixe une paire de Borel (B,T) et une extension F' comme alors. On va définir un élément $\rho(\beta,u)\in X_*(Z(M)^0)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$, ou plus précisément $\rho^G(\beta,u)$, pour toute racine $\beta\in\Sigma(Z(M)^0)$ et non plus seulement pour les racines indivisibles. La définition se fait par récurrence sur la dimension de G_{SC}. Soit $\beta\in\Sigma(Z(M)^0)$. On introduit le sous-groupe G_β de G engendré par M et les sous-groupes radiciels associés aux racines $n\beta$ pour $n\in\mathbb{Z}$. Si $dim(G_{\beta,SC})<dim(G_{SC})$, le terme $\rho^{G_\beta}(\beta,u)$ relatif à G_β est déjà défini et on pose

$\rho^G(\beta,u)=\rho^{G_\beta}(\beta,u)$. Supposons $dim(G_{\beta,SC})=dim(G_{SC})$. Dans ce cas, M est un Levi maximal de G et β est une racine indivisible (une telle racine est unique au signe près). On pose

$$\rho^G(\beta,u)=\rho^{Art}(\beta,u)\check{\beta}-\sum_{n>1}\rho^G(n\beta,u),$$

avec la convention $\rho^G(n\beta,u)=0$ si $n\beta$ n'est pas une racine.

On redescend à la situation définie sur F de la façon suivante. On a encore des applications de restriction

$$\begin{array}{ccc}\Sigma(Z(M)^0) & \to & \Sigma(A_M)\\ \beta' & \mapsto & \beta'_{A_M}\end{array},\quad \begin{array}{ccc}X_*(Z(M)^0)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R} & \to & \mathcal{A}_M\\ H & \mapsto & H_{\mathcal{A}_M}\end{array}.$$

Pour $\beta\in\Sigma(A_M)$, on pose

$$(1)\qquad \rho^G(\beta,u)=\sum_{\beta';\beta'_{A_M}=\beta}\rho^G(\beta',u)_{\mathcal{A}_M}.$$

On a, avec la même convention que ci-dessus,

(2) pour tout $\beta\in\Sigma_{ind}(A_M)$,

$$\rho^{Art}(\beta,u)\check{\beta}=\sum_{n\geq 1}\rho^G(n\beta,u).$$

Preuve. D'après 1.3(1), le membre de gauche est

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{\beta'\in\Sigma_{ind}(Z(M)^0),\beta'_{A_M}=n\beta}\rho^{Art}(\beta',u)\check{\beta}'_{\mathcal{A}_M}.$$

D'après (1) ci-dessus, le membre de droite est

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{\beta'\in\Sigma(Z(M)^0),\beta'_{A_M}=n\beta}\rho^G(\beta',u)_{\mathcal{A}_M}.$$

Les racines β' qui interviennent dans la deuxième expression sont exactement les multiples positifs de racines indivisibles intervenant dans la première. Cela nous ramène à prouver l'analogue suivant de l'assertion (2) : pour $\beta'\in\Sigma_{ind}(Z(M)^0)$, on a l'égalité

$$\rho^{Art}(\beta',u)\check{\beta}'=\sum_{n\geq 1}\rho^G(n\beta',u).$$

Introduisons le groupe $G_{\beta'}$ comme plus haut. D'après les définitions, le membre de droite est l'analogue de $\rho^{Art}(\beta',u)\check{\beta}'$ quand on remplace le groupe ambiant G par $G_{\beta'}$. Mais, β' étant indivisible, le groupe $G_{\beta'}$ est un Levi (c'est un Levi minimal parmi ceux qui contiennent M). Il résulte de la définition d'Arthur ([A1] paragraphe 3) que le terme $\rho^{Art}(\beta',u)\check{\beta}'$ est le même, que le groupe ambiant soit G ou $G_{\beta'}$. Cela prouve (2). $\square$

Pour $\beta\in\Sigma(A_M)$, notons G_β le sous-groupe de G engendré par M et les sous-groupes radiciels associés aux racines $n\beta$ pour $n\in\mathbb{Z}$. On a

(3) $\rho^G(\beta,u)=\rho^{G_\beta}(\beta,u)$.

Cela résulte comme (2) d'un dévissage facile.

Soit $L \in \mathcal{L}(M)$. Comme en 1.3(2), soit u' un élément de l'orbite induite de M à L par l'orbite de u. Pour tout $\beta' \in \Sigma(A_L)$, on a l'égalité

$$(4) \qquad \rho^G(\beta', u') = \sum_{\beta \in \Sigma(A_M), \beta_L = \beta'} \rho^G(\beta, u)_L.$$

Preuve. On note $G_{\beta'}$ le sous-groupe de G engendré par L et les sous-groupes radiciels associés aux racines $n\beta'$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Pour $\beta \in \Sigma(A_M)$, on définit G_β comme ci-dessus. Les racines $\beta \in \Sigma(A_M)$ qui se restreignent en β' sont exactement les racines $\beta \in \Sigma^{G_{\beta'}}(A_M)$ qui se restreignent en β'. Pour celles-ci, le groupe G_β est contenu dans $G_{\beta'}$. La relation (3) appliquée pour G et pour $G_{\beta'}$ entraîne que $\rho^G(\beta, u) = \rho^{G_{\beta'}}(\beta, u)$. Il en résulte que le membre de droite de (4) ne change pas quand on remplace le groupe ambiant G par $G_{\beta'}$. D'après (3), il en est de même du membre de gauche. Si $dim(G_{\beta',SC}) < dim(G_{SC})$, on conclut en raisonnant par récurrence sur cette dimension. Reste le cas où $G_{\beta'} = G$. Alors L est un Levi propre maximal et β' est une racine indivisible. Dans ce cas, on a d'après (2)

$$(5) \qquad \rho^G(\beta', u') = \rho^{Art}(\beta', u')\check{\beta}' - \sum_{n \geq 2} \rho^G(n\beta', u').$$

On applique 1.3(2) :

$$\rho^{Art}(\beta', u')\check{\beta}' = \sum_{m \geq 1} \sum_{\beta \in \Sigma_{ind}(A_M), \beta_L = m\beta'} \rho^{Art}(\beta, u)\check{\beta}_L.$$

En utilisant (2), c'est aussi

$$\sum_{m \geq 1} \sum_{\beta \in \Sigma_{ind}(A_M), \beta_L = m\beta'} \sum_{k \geq 1} \rho^G(k\beta, u)_L.$$

La triple somme se simplifie : les racines $k\beta$ intervenant ici sont exactement les éléments de $\Sigma(A_M)$ qui se restreignent en un multiple positif de β'. On obtient

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{\beta \in \Sigma(A_M), \beta_L = n\beta'} \rho^G(\beta, u)_L.$$

Pour $n \geq 2$, on applique la relation (4) déjà démontrée pour $n\beta'$. La somme ci-dessus devient

$$\Big(\sum_{\beta \in \Sigma(A_M), \beta_L = \beta'} \rho^G(\beta, u)_L \Big) + \sum_{n \geq 2} \rho^G(n\beta', u).$$

En glissant cette expression de $\rho^{Art}(\beta', u')\check{\beta}'$ dans l'expression (5), on obtient (4). $\square$

1.5 Modification de la définition des intégrales orbitales pondérées

On revient à la situation générale de 1.2 dont on reprend les notations. Si ω n'est pas trivial sur $M_\gamma(F)$, on pose encore $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$ pour tout f.

On suppose maintenant que ω est trivial sur $M_\gamma(F)$. On ne change rien dans le cas où γ est $\tilde{G}$-équisingulier. Dans le cas général, on définit pour tout $\alpha \in \Sigma(A_{\tilde{M}})$ un élément $\rho(\alpha, \gamma) \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$, ou plus précisément $\rho^{\tilde{G}}(\alpha, \gamma)$, par la formule

$$\rho^{\tilde{G}}(\alpha, \gamma) = \sum_{\beta \in \Sigma(A_{M_\eta}), \beta_{\tilde{M}} = \alpha} \rho^{G_\eta}(\beta, u)_{\tilde{M}}.$$

Pour $\alpha \in \Sigma(A_{\tilde{M}})$, pour $a \in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale et pour $\lambda \in i\mathcal{A}_{\tilde{M},\mathbb{C}}$, posons

$$r_\alpha(\gamma, a; \lambda) = |\alpha(a) - \alpha(a)^{-1}|_F^{<\lambda, \rho(\alpha,\gamma)>}.$$

On définit ensuite une $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille $(r_{\tilde{P}}(\gamma, a; \lambda))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$ par

$$r_{\tilde{P}}(\gamma, a; \lambda) = \prod_{\alpha >_P 0} r_\alpha(\gamma, a; \lambda/2)$$

pour $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$. Comme précédemment, on déduit de cette $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille une fonction $r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma, a; \lambda)$ et on pose $r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma, a) = r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma, a; 0)$.

Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, considérons la fonction

$$(1) \qquad a \mapsto \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} r^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\gamma, a) J^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(a\gamma, \omega, f).$$

Lemme. *La fonction (1) a une limite quand a tend vers 1 parmi les éléments en position générale de $A_{\tilde{M}}(F)$.*

Preuve. Notons $\varphi^{Art}(a, f)$ et $\varphi(a, f)$ les fonctions définies par les formules (2) du paragraphe 1.2 et (1) ci-dessus. On peut récrire

$$\varphi^{Art}(a, f) = D^{\tilde{G}}(a\gamma)^{1/2} \int_{M_\gamma(F)\backslash G(F)} \omega(g) f(g^{-1}a\gamma g)(r^{Art}v)_{\tilde{M}}(\gamma, a, g)\, dg,$$

où

$$(r^{Art}v)_{\tilde{M}}(\gamma, a, g) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} r^{\tilde{L},Art}_{\tilde{M}}(\gamma, a) v_{\tilde{L}}(g).$$

On reconnaît cette expression : c'est la fonction associée comme toujours à la $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille produit $(r^{Art}_{\tilde{P}}(\gamma, a; \lambda) v_{\tilde{P}}(g; \lambda))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$ ([A2] corollaire 6.5). On a une expression analogue pour la fonction $\varphi(a, f)$: il suffit de supprimer les exposants Art. Soit $(c_{\tilde{P}}(\gamma, a; \lambda))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$ la $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille telle que $r_{\tilde{P}}(\gamma, a; \lambda) = c_{\tilde{P}}(\gamma, a; \lambda) r^{Art}_{\tilde{P}}(\gamma, a; \lambda)$. D'après [A2] lemme 6.3, on a une égalité

$$(rv)_{\tilde{M}}(\gamma, a, g) = \sum_{\tilde{Q}\in\mathcal{F}(\tilde{M})} c'_{\tilde{Q}}(\gamma, a)(r^{Art}v)^{\tilde{Q}}_{\tilde{M}}(\gamma, a, g),$$

où $c'_{\tilde{Q}}(\gamma, a)$ est définie par [A2] 6.3. Un calcul habituel de descente des intégrales orbitales pondérées conduit alors à l'expression

$$\varphi(a, f) = \sum_{\tilde{Q}=\tilde{L}U_Q\in\mathcal{F}(\tilde{M})} c'_{\tilde{Q}}(\gamma, a) D^{\tilde{L}}(a\gamma)^{1/2} \int_{M_\gamma(F)\backslash L(F)} \omega(g) f_{\tilde{Q},\omega}(l^{-1}a\gamma l)(r^{Art}v)^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\gamma, a, l)\, dl.$$

Ou encore

$$(2) \qquad \varphi(a, f) = \sum_{\tilde{Q}=\tilde{L}U_Q\in\mathcal{F}(\tilde{M})} c'_{\tilde{Q}}(\gamma, a)\varphi^{\tilde{L},Art}(a, f_{\tilde{Q},\omega}).$$

Il suffit de voir que toutes les fonctions apparaissant ont une limite quand a tend vers 1. C'est le résultat d'Arthur pour les fonctions $\varphi^{\tilde{L},Art}(a, f_{\tilde{Q},\omega})$. Soit $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$. Notons

$\Sigma_{ind}(A_{\tilde{M}})$ l'ensemble des racines indivisibles de $A_{\tilde{M}}$ dans G. Le terme $r_{\tilde{P}}(\gamma, a; \lambda)$ est produit sur les racines $\alpha \in \Sigma_{ind}(A_{\tilde{M}})$ qui sont positives pour P des expressions

$$\prod_{n\geq 1} |\alpha(a)^n - \alpha(a)^{-n}|_F^{<\lambda,\rho(n\alpha,\gamma)>}.$$

La singularité en a de cette expression est la même que celle de

$$|\alpha(a) - \alpha(a)^{-1}|_F^{<\lambda,\sum_{n\geq 1}\rho(n\alpha,\gamma)>}.$$

Un calcul analogue vaut pour $r_{\tilde{P}}^{Art}(\gamma, a; \lambda)$. La somme $\sum_{n\geq 1} \rho(n\alpha, \gamma)$ y est remplacée par

$$\sum_{n\geq 1} \sum_{\beta\in\Sigma_{ind}(A_{M_\eta});\beta_{\tilde{M}}=n\alpha} \rho^{Art}(\beta, u)\check{\beta}_{\tilde{M}}.$$

Il résulte de 1.4(2) que cette expression est égale à

$$\sum_{n\geq 1} \sum_{\beta\in\Sigma_{ind}(A_{M_\eta});\beta_{\tilde{M}}=n\alpha} \sum_{k\geq 1} \rho^{G_\eta}(k\beta, u)_{\tilde{M}}.$$

Cette expression se simplifie : les racines $k\beta$ y intervenant décrivent tous les éléments de $\Sigma(A_{M_\eta})$ dont la restriction est un multiple positif de α. Elle est donc égale à

$$\sum_{n\geq 1} \sum_{\beta\in\Sigma(A_{M_\eta});\beta_{\tilde{M}}=n\alpha} \rho^{G_\eta}(\beta, u)_{\tilde{M}}.$$

D'après nos définitions, cela est égal à $\sum_{n\geq 1} \rho(n\alpha, \gamma)$. Cela montre que les fonctions $r_{\tilde{P}}(\gamma, a; \lambda)$ et $r_{\tilde{P}}^{Art}(\gamma, a; \lambda)$ ont même singularité en $a = 1$, donc que le rapport $c_{\tilde{P}}(\gamma, a; \lambda)$ est régulier en ce point. Le terme $c'_{\tilde{Q}}(\gamma, 1)$ est donc défini et il est facile de montrer que $c'_{\tilde{Q}}(\gamma, a)$ tend vers $c'_{\tilde{Q}}(\gamma, 1)$ quand a tend vers 1. $\square$

On définit $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$ comme la limite de la fonction (1) quand a tend vers 1. De nouveau, si γ est $\tilde{G}$-équisingulier, on retrouve la définition simple donnée plus haut.

La preuve ci-dessus, plus précisément l'égalité (2), montre que la précision (3) du paragraphe 1.2 vaut aussi pour nos intégrales orbitales pondérées. A savoir

(3) il existe $r > 0$ tel que, pour tout $\gamma \in \tilde{M}(F)$, tout $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, il existe $C > 0$ de sorte que

$$|J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) - \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma, a) J_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(a\gamma, \omega, f)| \leq C d(a)^r$$

pour tout $a \in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale et assez proche de 1.

Rappelons que les données de γ et d'une mesure de Haar sur $M_\gamma(F)$ définissent un élément $\boldsymbol{\gamma} \in D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F), \omega) \otimes Mes(M(F))^*$: pour $\varphi \in C_c^\infty(\tilde{M}(F))$ et pour une mesure de Haar dm sur $M(F)$, on a $I^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \varphi \otimes dm) = I^{\tilde{M}}(\gamma, \omega, \varphi)$, où le membre de droite est calculé à l'aide de la mesure dm et de celle fixée sur $M_\gamma(F)$. L'application qui, à γ et à une mesure de Haar sur $M_\gamma(F)$, associe la forme linéaire $f \mapsto J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$ vérifie les propriétés requises pour se factoriser puis s'étendre par linéarité en une application définie sur $D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F), \omega) \otimes Mes(M(F))^*$. C'est-à-dire que l'on peut définir une application linéaire qui, à $\boldsymbol{\gamma} \in D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}, \omega) \otimes Mes(M(F))^*$, associe une forme linéaire $f \mapsto J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, f)$, de sorte que si $\boldsymbol{\gamma}$ provient comme ci-dessus d'un élément γ et d'une mesure de Haar sur $M_\gamma(F)$, on ait l'égalité $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, f) = J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$.

On aura besoin plus tard de la propriété suivante. Soit $\alpha \in \Sigma(A_{\tilde{M}})$. Introduisons le sous-groupe G_α de G engendré par M et les sous-espaces radiciels associés aux racines de la forme $k\alpha$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Il est normalisé par $\tilde{M}$, c'est-à-dire que l'on a l'égalité $G_\alpha \tilde{M} = \tilde{M} G_\alpha$. On note $\tilde{G}_\alpha$ cet espace tordu. Alors

(4) on a l'égalité $\rho^{\tilde{G}}(\alpha, \gamma) = \rho^{\tilde{G}_\alpha}(\alpha, \gamma)$.

Cela résulte de 1.4(3) et d'un dévissage des définitions.

1.6 Définition des intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes

On fixe toujours $\tilde{M}$, la mesure sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ et le sous-groupe compact K. Pour simplifier, fixons des mesures de Haar sur $G(F)$ et $M(F)$. On définit comme d'habitude des homomorphismes

$$H_G : G(F) \to \mathcal{A}_G \text{ et } H_{\tilde{G}} : G(F) \to \mathcal{A}_{\tilde{G}}$$

par

$$exp(< x^*, H_G(g) >) = |x^*(g)|_F, \text{ resp } exp(< x^*, H_{\tilde{G}}(g) >) = |x^*(g)|_F$$

pour tout $x^* \in X^*(G)^{\Gamma_F}$, resp. $x^* \in X^*(G)^{\Gamma_F, \theta}$. Le terme $H_{\tilde{G}}(g)$ n'est autre que la projection naturelle de $H_G(g)$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$. Notons $\mathcal{A}_{\tilde{G},F}$ l'image de l'application $H_{\tilde{G}}$. C'est un réseau de l'espace $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$. Notons $G(F)^1$ le noyau de $H_{\tilde{G}}$ et posons

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F} = G(F)^1 \backslash \tilde{G}(F).$$

C'est un espace principal homogène sous $\mathcal{A}_{\tilde{G},F}$. On note

$$\tilde{H}_{\tilde{G}} : \tilde{G}(F) \to \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$$

l'application naturelle. Introduisons l'espace $C^\infty_{ac}(\tilde{G}(F))$ formé des fonctions f sur $\tilde{G}(F)$ telles que :

(i) il existe un sous-groupe ouvert compact K' de $G(F)$ tel que f soit biinvariante par K' ;

(ii) pour tout élément $\varphi \in C^\infty_c(\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F})$ (c'est-à-dire que φ est une fonction sur $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$ à support fini), le produit $f(\varphi \circ \tilde{H}_{\tilde{G}})$ appartient à $C^\infty_c(\tilde{G}(F))$.

Les définitions des intégrales orbitales ou des intégrales orbitales pondérées se généralisent aux éléments de $C^\infty_{ac}(\tilde{G}(F))$. En effet, soient $\gamma \in \tilde{M}(F)$ et $f \in C^\infty_{ac}(\tilde{G}(F))$. La projection dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F}$ de la classe de conjugaison de γ est réduite à un point. Choisissons $\varphi \in C^\infty_c(\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F})$ valant 1 en ce point. On pose $J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma, \omega, f) = J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma, \omega, f(\varphi \circ \tilde{H}_{\tilde{G}}))$. Cela ne dépend pas du choix de φ. On note $I_{ac}(\tilde{G}(F), \omega)$ le quotient de $C^\infty_{ac}(\tilde{G}(F))$ par le sous-espace des éléments f tels que $I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$ pour tout $\gamma \in \tilde{G}_{reg}(F)$.

A l'aide des caractères pondérés, Arthur définit une application linéaire

$$\phi_{\tilde{M}} : C^\infty_c(\tilde{G}(F)) \to I_{ac}(\tilde{M}(F), \omega).$$

(Arthur traite le cas où $\omega = 1$, le cas général est similaire, cf. [W1] 6.4). Pour $\gamma \in \tilde{M}(F)$, pour une mesure fixée sur $M_\gamma(F)$ et pour $f \in C^\infty_c(\tilde{G}(F))$, on définit $I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma, \omega, f)$ par la formule de récurrence

$$I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma, \omega, f) = J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma, \omega, f) - \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}), \tilde{L} \neq \tilde{G}} I^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\gamma, \omega, \phi_{\tilde{L}}(f)).$$

Quand $\omega = 1$, Arthur montre que cette distribution $f \mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, f)$ est invariante par conjugaison. Le cas général est similaire : la distribution $f \mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$ est ω-équivariante, c'est-à-dire qu'elle se factorise en une application définie sur $I(\tilde{G}(F), \omega)$. Remarquons que l'on a besoin de connaître cette propriété par récurrence pour que la définition ci-dessus ait un sens. Plus exactement, on a besoin de savoir par récurrence que cette distribution s'étend en une application linéaire définie sur $C_{ac}^{\infty}(\tilde{G}(F))$ et que celle-ci se factorise en une application linéaire définie sur $I_{ac}(\tilde{G}(F), \omega)$. Cela résulte des propriétés de l'application $\phi_{\tilde{M}}$. Par ailleurs, Arthur montre que la distribution $f \mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$ est indépendante du sous-groupe K choisi, lequel peut donc disparaître des données.

Attention : cette distribution n'est pas, en général, supportée par la classe de conjugaison de γ. Elle n'appartient même pas à $D_{géom}(\tilde{G}(F), \omega)$.

Encore une fois, on se débarrasse des mesures en définissant $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$ pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))^*$ et $\mathbf{f} \in C_c^{\infty}(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$, ou $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$.

1.7 Propriétés des intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes

Soit toujours $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. Pour énoncer les quatre premières propriétés, il est plus commode de fixer des mesures de Haar sur $M(F)$ et $G(F)$, ainsi que sur les groupes $M_\gamma(F)$ qui apparaissent.

Soient $\gamma \in \tilde{M}(F)$ et $f \in C_c^{\infty}(\tilde{G}(F))$. Pour $\varphi \in C_c^{\infty}(\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F})$, on a l'égalité

(1) $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f(\varphi \circ \tilde{H}_{\tilde{G}})) = \varphi \circ \tilde{H}_{\tilde{G}}(\gamma) I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$.

A fortiori, la distribution $f \mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$ est supportée par l'ensemble des $\gamma' \in \tilde{G}(F)$ tels que $\tilde{H}_{\tilde{G}}(\gamma') = \tilde{H}_{\tilde{G}}(\gamma)$.

On a aussi l'égalité

$$(2) \qquad I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = lim_{a \to 1} \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma, a) I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(a\gamma, \omega, f),$$

la limite étant prise au même sens qu'en 1.2. Plus précisément

(3) il existe $r > 0$ tel que, pour tout $\gamma \in \tilde{M}(F)$, tout $f \in C_c^{\infty}(\tilde{G}(F))$, il existe $C > 0$ de sorte que

$$|I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) - \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma, a) I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(a\gamma, \omega, f)| \leq Cd(a)^r$$

pour tout $a \in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale et assez proche de 1.

Supposons que γ est $\tilde{G}$-équisingulier. Alors

(4) il existe $f' \in C_c^{\infty}(\tilde{M}(F))$ et un voisinage de γ dans $\tilde{M}(F)$ tels que, pour γ' dans ce voisinage, on ait l'égalité $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma', \omega, f) = I^{\tilde{M}}(\gamma', \omega, f')$.

Pour la cinquième propriété, il est plus simple de se débarrasser des mesures. Rappelons que pour tout $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$, on dispose d'applications linéaires en dualité

$$\begin{array}{ccc} I(\tilde{L}(F), \omega) \otimes Mes(L(F)) & \to & I(\tilde{M}(F), \omega) \otimes Mes(M(F)) \\ \mathbf{f} & \mapsto & \mathbf{f}_{\tilde{M}} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} D_{géom}(\tilde{M}(F), \omega) \otimes Mes(M(F))^* & \to & D_{géom}(\tilde{L}(F), \omega) \otimes Mes(L(F))^* \\ \boldsymbol{\gamma} & \mapsto & \boldsymbol{\gamma}^{\tilde{L}}. \end{array}$$

Remarquons que si $\boldsymbol{\gamma}$ est l'intégrale orbitale dans $\tilde{M}(F)$ associée à un élément $\tilde{G}$-équisingulier de $\tilde{M}(F)$, $\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{L}}$ est l'intégrale orbitale dans $\tilde{L}(F)$ associée au même élément.

Remarque. Même si on impose que ω est trivial sur $Z(G;F)^\theta$, ω peut ne pas être trivial sur $Z(M;F)^\theta$ pour un espace de Levi $\tilde{M}$. Dans ce cas, les espaces $I(\tilde{M}(F),\omega)$ et $D_{géom}(\tilde{M}(F),\omega)$ sont nuls.

Pour deux éléments $\tilde{L},\tilde{L}' \in \mathcal{P}(\tilde{M})$, on définit le réel $d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L},\tilde{L}')$: il est nul sauf si $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} = \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}} \oplus \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'}$; si cette égalité est vérifiée, c'est le rapport entre la mesure sur le premier espace et le produit des mesures sur les deux espaces du second membre.

Lemme. *Soient $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$, $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{M}(F),\omega) \otimes Mes(M(F))^*$ et $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F),\omega) \otimes Mes(G(F))$. On a l'égalité*

$$I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{L}},\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}' \in \mathcal{L}(\tilde{M})} d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L},\tilde{L}') I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}_{\tilde{L}'}).$$

Preuve. On peut fixer des mesures et supposer que $\boldsymbol{\gamma}$ est l'intégrale orbitale associée à un élément $\gamma \in \tilde{M}(F)$. Supposons que γ est $\tilde{G}$-équisingulier. Alors la preuve de la formule est essentiellement formelle à partir de la formule de descente des poids, cf. [A3] preuve du théorème 8.1. Traitons le cas général. Pour $a \in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale, posons

$$\varphi(a) = \sum_{\tilde{R} \in \mathcal{L}(\tilde{L})} r_{\tilde{L}}^{\tilde{R}}(\gamma,a) I_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(a\gamma,\omega,f).$$

Par une formule de descente, on a pour tout $\tilde{R}$ l'égalité

$$r_{\tilde{L}}^{\tilde{R}}(\gamma,a) = \sum_{\tilde{R}' \in \mathcal{L}(\tilde{M}); \tilde{R}' \subset \tilde{R}} d_{\tilde{M}}^{\tilde{R}}(\tilde{L},\tilde{R}') r_{\tilde{M}}^{\tilde{R}'}(\gamma,a).$$

D'où

$$\varphi(a) = \sum_{\tilde{R}' \in \mathcal{L}(\tilde{M})} r_{\tilde{M}}^{\tilde{R}'}(\gamma,a) \sum_{\tilde{R} \in \mathcal{L}(\tilde{L}); \tilde{R}' \subset \tilde{R}} d_{\tilde{M}}^{\tilde{R}}(\tilde{L},\tilde{R}') I_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(a\gamma,\omega,f).$$

Fixons $\tilde{R}'$ et $\tilde{R}$. Puisque $R'_{a\gamma} = G_{a\gamma}$, on peut utiliser la formule de l'énoncé pour cet élément. D'où

$$I_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(a\gamma,\omega,f) = \sum_{\tilde{L}' \in \mathcal{L}(\tilde{R}')} d_{\tilde{R}'}^{\tilde{G}}(\tilde{R},\tilde{L}') I_{\tilde{R}'}^{\tilde{L}'}(a\gamma,\omega,f_{\tilde{L}',\omega}).$$

Puis

$$\varphi(a) = \sum_{\tilde{L}' \in \mathcal{L}(\tilde{M})} \sum_{\tilde{R}' \in \mathcal{L}^{\tilde{L}'}(\tilde{M})} x(\tilde{R}',\tilde{L}') r_{\tilde{M}}^{\tilde{R}'}(\gamma,a) I_{\tilde{R}'}^{\tilde{L}'}(a\gamma,\omega,f_{\tilde{L}',\omega}),$$

où $x(\tilde{R}',\tilde{L}')$ est la somme sur les $\tilde{R} \in \mathcal{L}(\tilde{L})$ tels que $\tilde{R}' \subset \tilde{R}$ des produits

$$d_{\tilde{M}}^{\tilde{R}}(\tilde{L},\tilde{R}') d_{\tilde{R}'}^{\tilde{G}}(\tilde{R},\tilde{L}').$$

Considérons l'ensemble A des couples d'espace de Levi $(\tilde{L}',\tilde{R}')$ tels que $\tilde{M} \subset \tilde{R}' \subset \tilde{L}'$ et $d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L},\tilde{L}') \neq 0$. Considérons l'ensemble B des triplets $(\tilde{L}',\tilde{R}',\tilde{R})$ tels que $\tilde{M} \subset \tilde{R}' \subset \tilde{L}'$, $\tilde{L} \subset \tilde{R}$, $\tilde{R}' \subset \tilde{R}$ et $d_{\tilde{M}}^{\tilde{R}}(\tilde{L},\tilde{R}') d_{\tilde{R}'}^{\tilde{G}}(\tilde{R},\tilde{L}') \neq 0$. Montrons que l'on a

(5) l'application $(\tilde{L}',\tilde{R}',\tilde{R})\mapsto(\tilde{L}',\tilde{R}')$ est une bijection de B sur A ; pour $(\tilde{L}',\tilde{R}',\tilde{R})\in B$, on a l'égalité
$$d_{\tilde{M}}^{\tilde{R}}(\tilde{L},\tilde{R}')d_{\tilde{R}'}^{\tilde{G}}(\tilde{R},\tilde{L}')=d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L},\tilde{L}').$$

Soit $(\tilde{L}',\tilde{R}',\tilde{R})\in B$. La non-nullité de $d_{\tilde{M}}^{\tilde{R}}(\tilde{L},\tilde{R}')d_{\tilde{R}'}^{\tilde{G}}(\tilde{R},\tilde{L}')$ équivaut aux relations
$$(6)\qquad \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{R}}=\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}\oplus\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{R}'}$$
et
$$(7)\qquad \mathcal{A}_{\tilde{R}'}^{\tilde{G}}=\mathcal{A}_{\tilde{R}'}^{\tilde{R}}\oplus\mathcal{A}_{\tilde{R}'}^{\tilde{L}'}.$$
D'où
$$\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}=\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{R}'}\oplus\mathcal{A}_{\tilde{R}'}^{\tilde{G}}=\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{R}'}\oplus\mathcal{A}_{\tilde{R}'}^{\tilde{R}}\oplus\mathcal{A}_{\tilde{R}'}^{\tilde{L}'}=\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{R}}\oplus\mathcal{A}_{\tilde{R}'}^{\tilde{L}'}=\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}\oplus\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{R}'}\oplus\mathcal{A}_{\tilde{R}'}^{\tilde{L}'}=\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}\oplus\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'}.$$
D'où l'égalité
$$(8)\qquad \mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}=\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}\oplus\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'}$$
des termes extrêmes, qui équivaut à la non-nullité de $d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L},\tilde{L}')$. Cela prouve que $(\tilde{L}',\tilde{R}')\in A$. Inversement, soit $(\tilde{L}',\tilde{R}')\in A$. On doit prouver qu'il existe exactement un espace de Levi $\tilde{R}$ tel que $(\tilde{L}',\tilde{R}',\tilde{R})\in B$. Il y en a au plus un : il est déterminé par la relation (6). Montrons que ce $\tilde{R}$ existe. On le définit comme le commutant dans $\tilde{G}$ du tore $(A_{\tilde{L}}\cap A_{\tilde{R}'})^0$. D'après [I] 3.1(11), cet ensemble est un espace de Levi pourvu qu'il ne soit pas vide. Or il n'est pas vide puisque sa définition implique qu'il contient $\tilde{L}$ et $\tilde{R}'$. Ces deux inclusions impliquent $A_{\tilde{R}}\subset A_{\tilde{L}}$ et $A_{\tilde{R}}\subset A_{\tilde{R}'}$. On a aussi par définition $(A_{\tilde{L}}\cap A_{\tilde{R}'})^0\subset A_{\tilde{R}}$. On obtient donc
$$(A_{\tilde{L}}\cap A_{\tilde{R}'})^0\subset A_{\tilde{R}}\subset A_{\tilde{L}}\cap A_{\tilde{R}'}$$
d'où l'égalité $(A_{\tilde{L}}\cap A_{\tilde{R}'})^0=A_{\tilde{R}}$ puisque ce dernier ensemble est connexe. Cette égalité est équivalente à $\mathcal{A}_{\tilde{R}}=\mathcal{A}_{\tilde{L}}\cap\mathcal{A}_{\tilde{R}'}$. Par passage aux orthogonaux dans $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$, on obtient $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{R}}=\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}+\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{R}'}$. Mais ces deux derniers espaces sont en somme directe d'après l'inclusion $\tilde{R}'\subset\tilde{L}'$ et d'après (8). Donc (6) est vérifié. On a montré ci-dessus que (6) et (7) impliquaient (8). Le calcul est réversible : (6) et (8) impliquent (7). Puisque $\tilde{R}$ vérifie (6) et (7), on a $(\tilde{L}',\tilde{R}',\tilde{R})\in B$. La dernière assertion de (5) s'obtient facilement en précisant le calcul qui a conduit ci-dessus à l'égalité (8). Cela prouve (5).

Cette propriété entraîne que, pour $\tilde{L}'$ et $\tilde{R}'$ intervenant dans l'expression de $\varphi(a)$ ci-dessus, on a $x(\tilde{R}',\tilde{L}')=d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L},\tilde{L}')$. Alors
$$\varphi(a)=\sum_{\tilde{L}'\in\mathcal{L}(\tilde{M})}d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L},\tilde{L}')\sum_{\tilde{R}'\in\mathcal{L}^{\tilde{L}'}(\tilde{M})}r_{\tilde{M}}^{\tilde{R}'}(\gamma,a)I_{\tilde{R}'}^{\tilde{L}'}(a\gamma,\omega,f_{\tilde{L}',\omega}).$$

Pour tout $\tilde{L}'$, la relation (2) nous dit que la somme en $\tilde{R}'$ tend vers $I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'}(\gamma,\omega,f_{\tilde{L}',\omega})$ quand a tend vers 1. Donc, quand a tend vers 1, $\varphi(a)$ tend vers le membre de droite de l'égalité de l'énoncé.

Fixons $b\in A_{\tilde{L}}(F)$ en position générale et faisons tendre a vers b. Pour $\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{L})$, on applique (4) : il existe $f'\in C_c^\infty(\tilde{R}(F))$ tel que $I_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\gamma',\omega,f)=I^{\tilde{R}}(\gamma',\omega,f')$ pour tout $\gamma'\in\tilde{R}(F)$ assez proche de $b\gamma$. Le deuxième terme est une intégrale orbitale ordinaire. En appliquant la formule de descente usuelle pour ces intégrales, on a
$$I^{\tilde{R}}(a\gamma,\omega,f')=I^{\tilde{M}}(a\gamma,\omega,(f')_{\tilde{M},\omega}).$$

La limite de cette expression quand a tend vers b est $I^{\tilde{M}}(b\gamma,\omega,(f')_{\tilde{M},\omega})$. Par définition de l'induction, c'est $I^{\tilde{L}}(b\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{L}},(f')_{\tilde{L},\omega})$. Ecrivons la distribution $\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{L}}$ comme une combinaison linéaire d'intégrales orbitales associées à des éléments γ_i de l'orbite induite de γ :

$$I^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{L}},\psi)=\sum_{i=1,...,n}c_iI^{\tilde{L}}(\gamma_i,\omega,\psi)$$

pour tout $\psi\in C_c^\infty(\tilde{L}(F))$. Puisque $b\in A_{\tilde{L}}(F)$, on a la même égalité si l'on remplace $\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{L}}$ par $b\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{L}}$ et les γ_i par $b\gamma_i$. Donc

$$lim_{a\to b}I_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(a\gamma,\omega,f)=\sum_{i=1,...,n}c_iI^{\tilde{L}}(b\gamma_i,\omega,(f')_{\tilde{L},\omega}).$$

Puisque b est en position générale, le membre de droite n'est autre que

$$\sum_{i=1,...,n}c_iI^{\tilde{R}}(b\gamma_i,\omega,f').$$

En revenant à la définition de f', on obtient

$$lim_{a\to b}I_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(a\gamma,\omega,f)=\sum_{i=1,...,n}c_iI_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(b\gamma_i,\omega,f).$$

On montrera plus loin que, pour tout $i=1,...,n$, on a l'égalité

$$(9)\qquad lim_{a\to b}r_{\tilde{L}}^{\tilde{R}}(\gamma,a)=r_{\tilde{L}}^{\tilde{R}}(\gamma_i,b).$$

Admettant cela, on obtient

$$lim_{a\to b}\varphi(a)=\sum_{i=1,...,n}c_i\sum_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{L})}r_{\tilde{L}}^{\tilde{R}}(\gamma_i,b)I_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(b\gamma_i,\omega,f).$$

En utilisant la relation (2), on voit que cette expression a une limite quand b tend vers 1. Plus précisément,

$$lim_{b\to 1}lim_{a\to b}\varphi(a)=\sum_{i=1,...,n}c_iI_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\gamma_i,\omega,f).$$

La limite de gauche est égale à $lim_{a\to 1}\varphi(a)$, puisque cette dernière limite existe. Par définition, la somme de droite ci-dessus n'est autre que le membre de gauche de l'égalité de l'énoncé. Donc $lim_{a\to 1}\varphi(a)$ est égale au membre de gauche de cette égalité. On a déjà prouvé qu'elle était égale au membre de droite. Cela conclut.

Il reste à prouver l'égalité (9). On se ramène aisément à prouver que, pour $\tilde{Q}\in\mathcal{P}(\tilde{L})$ et $\lambda\in i\mathcal{A}_{\tilde{L}}^*$, on a l'égalité similaire

$$(10)\qquad lim_{a\to b}r_{\tilde{Q}}(\gamma,a;\lambda)=r_{\tilde{Q}}(\gamma_i,b;\lambda).$$

Fixons $\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})$ avec $\tilde{P}\subset\tilde{Q}$. Le terme $r_{\tilde{Q}}(\gamma,a;\lambda)$ est produit sur les $\alpha'\in\Sigma(A_{\tilde{M}})$ qui sont positifs pour P de

$$|\alpha'(a)-\alpha'(a)^{-1}|_F^{<\lambda,\rho(\alpha',\gamma)>/2}.$$

Parce que $\lambda \in i\mathcal{A}_{\tilde{L}}^*$, ce terme vaut 1 si la restriction de α' à $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$ est nulle. Soit α' de restriction non nulle à $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$. Alors cette restriction α appartient à $\Sigma(A_{\tilde{L}})$. Que α' soit positive pour P équivaut à ce que α soit positive pour Q. D'autre part,

$$lim_{a\to b}|\alpha'(a)-\alpha'(a)^{-1}|_F = |\alpha(b)-\alpha(b)^{-1}|_F.$$

Donc

$$lim_{a\to b} r_{\tilde{Q}}(\gamma,a;\lambda) = \prod_{\alpha\in\Sigma(A_{\tilde{L}});\alpha>_Q 0} |\alpha(b)-\alpha(b)^{-1}|_F^{<\lambda,\rho(\alpha,\gamma)>/2},$$

où on a posé

$$\rho(\alpha,\gamma) = \sum_{\alpha'\in\Sigma(A_{\tilde{M}});\alpha'_{\tilde{L}}=\alpha} \rho(\alpha',\gamma)_{\tilde{L}}.$$

En comparant avec la définition de $r_{\tilde{Q}}(\gamma_i,b;\lambda)$, on voit que (10) résulte de l'égalité

$$(11) \qquad \rho(\alpha,\gamma)=\rho(\alpha,\gamma_i)$$

pour tout $\alpha \in \Sigma(A_{\tilde{L}})$. Ecrivons $\gamma = u\eta$ comme en 1.2. Alors on peut supposer que $\gamma_i = u_i\eta$, où u_i appartient à la classe de conjugaison dans L_η induite par la classe de conjugaison de u dans M_η. Par définition,

$$\rho(\alpha,\gamma_i) = \sum_{\beta\in\Sigma(A_{L_\eta});\beta_{\tilde{L}}=\alpha} \rho^{G_\eta}(\beta,u_i)_{\tilde{L}},$$

$$\rho(\alpha,\gamma) = \sum_{\alpha'\in\Sigma(A_{\tilde{M}});\alpha'_{\tilde{L}}=\alpha}\ \sum_{\beta'\in\Sigma(A_{M_\eta}),\beta'_{\tilde{M}}=\alpha'} \rho^{G_\eta}(\beta',u)_{\tilde{L}}.$$

On peut récrire

$$\rho(\alpha,\gamma) = \sum_{\beta'\in\Sigma(A_{M_\eta});\beta'_{\tilde{L}}=\alpha} \rho^{G_\eta}(\beta',u)_{\tilde{L}} = \sum_{\beta\in\Sigma(A_{L_\eta});\beta_{\tilde{L}}=\alpha}\ \sum_{\beta'\in\Sigma(A_{M_\eta});\beta'_{L_\eta}=\beta} \rho^{G_\eta}(\beta',u_i)_{\tilde{L}}.$$

Mais alors l'égalité (11) résulte de 1.4(4). Cela achève la démonstration. □

On peut préciser la preuve ci-dessus : pour montrer que $\varphi(a)$ tend vers le membre de droite de l'égalité de l'énoncé, utilisons la relation (3) au lieu de (2). On obtient (en notant $\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{L}}$ la distribution induite de l'intégrale orbitale associée à γ) :

(12) existe $r>0$ tel que, pour tout $\gamma \in \tilde{M}(F)$ et tout $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, il existe $C>0$ de sorte que

$$|I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{L}},f) - \sum_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{L})} r_{\tilde{L}}^{\tilde{R}}(\gamma,a) I_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(a\gamma,\omega,f)| \leq Cd(a)^r$$

pour tout $a \in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale et assez proche de 1.

1.8 Variantes des termes $\rho(\beta,u)$

On suppose dans ce paragraphe $G=\tilde{G}$ et $\omega=1$. On considère un Levi M de G et un élément unipotent $u\in M(F)$. On fixe une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}=(B,T,(E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de G définie sur $\bar{F}$ de sorte que M soit standard relativement à $\mathcal{E}$. On introduit une extension finie F' de F telle que $\mathcal{E}$ soit définie sur F' et G soit déployé sur F'. On introduit aussi l'action galoisienne quasi-déployée $\sigma\mapsto\sigma_{G^*}$ qui conserve $\mathcal{E}$, cf. [I] 1.2.

Notons $\Sigma(T)$ l'ensemble des racines de T dans G. On a fixé en 1.2 une forme quadratique définie positive sur $X_*(T)\otimes\mathbb{R}$, d'où, par dualité, une telle forme sur $X^*(T)\otimes\mathbb{R}$, que l'on note $(.,.)$.

On fixe une fonction B sur $\Sigma(T)$ à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{Q}_{>0}$ des rationnels strictement positifs. On lui impose les conditions suivantes :

• $B(-\beta)=B(\beta)$, $B(\sigma_{G^*}(\beta))=B(\beta)$ et $B(w\beta)=B(\beta)$ pour tout $\beta\in\Sigma(T)$, tout $\sigma\in\Gamma_F$ et tout $w\in W$;

• pour toute composante irréductible Σ' du système de racines $\Sigma(T)$, ou bien B est constante sur Σ', ou bien la fonction $\beta\mapsto\frac{B(\beta)}{(\beta,\beta)}$ est constante sur Σ'.

On pose $V^*=X^*(T)\otimes\mathbb{R}$, $V_*=X_*(T)\otimes\mathbb{R}$. Définissons les sous-ensembles $\Sigma(T,B)=\{B(\beta)^{-1}\beta;\beta\in\Sigma(T)\}$ de V^* et $\check{\Sigma}(T,B)=\{B(\beta)\check{\beta};\beta\in\Sigma(T)\}$ de V_*. On va voir que $\Sigma(T,B)$ est un système de racines dont $\check{\Sigma}(T,B)$ est l'ensemble associé de coracines. On note Z^* l'annulateur dans V^* de l'ensemble de coracines $\check{\Sigma}(T)$ et Z_* l'annulateur dans V_* de l'ensemble $\Sigma(T)$. Pour tout sous-système irréductible Σ' de $\Sigma(T)$, on note $V^*(\Sigma')$, resp. $V_*(\check{\Sigma}')$, le sous-espace de V^*, resp. V_*, engendré par Σ', resp. par l'ensemble correspondant $\check{\Sigma}'$ de coracines. On a

$$V^*=Z^*\oplus(\oplus_{\Sigma'\in Irr}V^*(\Sigma')),\ V_*=Z_*\oplus(\oplus_{\Sigma'\in Irr}V_*(\check{\Sigma}')),$$

où Irr est l'ensemble des composantes irréductibles. Notons Irr_+ l'ensemble des composantes sur lesquelles B est constante et notons Irr_- le complémentaire. Posons

$$V(B)^*=Z^*\oplus(\oplus_{\Sigma'\in Irr_+}V^*(\Sigma'))\oplus(\oplus_{\Sigma'\in Irr_-}V_*(\check{\Sigma}')),$$

$$V(B)_*=Z_*\oplus(\oplus_{\Sigma'\in Irr_+}V_*(\check{\Sigma}'))\oplus(\oplus_{\Sigma'\in Irr_-}V^*(\Sigma')).$$

Notons $\iota^*_{Z^*}$ l'identité de Z^*. Pour $\Sigma'\in Irr_+$, notons $\iota^*_{\Sigma'}$ l'homothétie de $V^*(\Sigma')$ de rapport la valeur constante de B sur Σ'. Pour $\Sigma'\in Irr_-$, notons $\iota^*_{\Sigma'}:V^*(\Sigma')\to V_*(\check{\Sigma}')$ la composée de l'isomorphisme déduit de la forme quadratique fixée (cet isomorphisme envoie une racine β sur $(\beta,\beta)\check{\beta}/2$) et de l'homothétie de rapport la valeur constante sur Σ' de la fonction $\beta\mapsto 2B(\beta)(\beta,\beta)^{-1}$. On note $\iota^*:V^*\to V(B)^*$ la somme directe de $\iota^*_{Z^*}$ et des $\iota^*_{\Sigma'}$. On note $\iota_*:V_*\to V(B)_*$ l'inverse du transposé de ι^*. On vérifie que ι_* envoie $\Sigma(T,B)$ sur

$$(1)\qquad(\sqcup_{\Sigma'\in Irr_+}\Sigma')\sqcup(\sqcup_{\Sigma'\in Irr_-}\check{\Sigma}'),$$

tandis que ι_* envoie $\check{\Sigma}(T,B)$ sur

$$(2)\qquad(\sqcup_{\Sigma'\in Irr_+}\check{\Sigma}')\sqcup(\sqcup_{\Sigma'\in Irr_-}\Sigma').$$

Il est clair que l'ensemble (1) est un ensemble de racines dont l'ensemble (2) est l'ensemble associé de coracines.

Notons $j:\Sigma(T)\to\Sigma(T,B)$ l'application $\beta\mapsto B(\beta)^{-1}\beta$. L'application composée $\iota^*\circ j$ est la somme, composante par composante, soit de l'identité, soit de l'échange $\beta\mapsto\check{\beta}$. Il en résulte que, pour un sous-ensemble $\Sigma_0\subset\Sigma(T)$, Σ_0 est un sous-système de racines, resp. un sous-ensemble de Levi, de $\Sigma(T)$ si et seulement si $j(\Sigma_0)$ est un sous-système de racines, resp. un sous-ensemble de Levi, de $\Sigma(T,B)$. Notons que j est équivariante pous l'action de W et pour l'action galoisienne quasi-déployée.

On note $\Sigma(Z(M)^0,B)$ l'ensemble des restrictions non nulles à $X_*(Z(M)^0)\times\mathbb{R}$ des $B(\beta')^{-1}\beta$ pour $\beta'\in\Sigma(T)$, ou encore des β' pour $\beta'\in\Sigma(T,B)$. L'interprétation ci-dessus montre que cet ensemble a beaucoup de propriétés communes avec celui des racines

$\Sigma(Z(M)^0)$. D'abord, pour $\beta \in \Sigma(Z(M)^0, B)$, on peut définir le groupe de Levi M_β (sur F') tel que $X_*(Z(M_\beta)^0) \otimes \mathbb{R}$ soit l'annulateur de β dans $X_*(Z(M)^0) \times \mathbb{R}$. On a aussi

(3) supposons que M soit maximal parmi les Levi propres de G ; alors il existe il unique entier $n \geq 1$ et, au signe près, un unique $\beta \in \Sigma(Z(M)^0, B)$ tel que $\Sigma(Z(M)^0, B) = \{\pm k\beta; k = 1, ..., n\}$;

(4) pour $\beta \in \Sigma(Z(M)^0, B)$, l'ensemble des $\beta' \in \Sigma(T)$ tels que la restriction de $B(\beta')^{-1}\beta'$ à $X_*(Z(M)^0) \times \mathbb{R}$ soit de la forme $k\beta$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (y compris $k = 0$) est un sous-système de racines de $\Sigma(T)$ qui contient $\Sigma^M(T)$;

plus généralement

(5) soient $\beta_1, ..., \beta_n$ des éléments linéairement indépendants de $\Sigma(Z(M)^0, B)$; alors l'ensemble des $\beta' \in \Sigma(T)$ tels que la restriction de $B(\beta')^{-1}\beta'$ à $X_*(Z(M)^0) \times \mathbb{R}$ appartienne au $\mathbb{Z}$-module engendré par les β_i est un sous-système de racines de $\Sigma(T)$ qui contient $\Sigma^M(T)$.

Dans la situation (4), il existe à isomorphisme près un unique groupe réductif connexe défini et déployé sur F' qui possède un tore maximal isomorphe à T et dont le système de racines est l'ensemble décrit de β'. On le note G_β. Il possède un groupe de Levi isomorphe à M et on identifie ce sous-groupe à M. On note encore B la restriction de B à l'ensemble de racines de G_β ; cette restriction vérifie les mêmes conditions que la fonction de départ.

Attention. Le groupe G_β n'est pas, en général, un sous-groupe de G. Par exemple, considérons $G = SO(5)$, $M = GL(1) \times SO(3)$ et une fonction B proportionnelle au carré de la longueur. L'ensemble $\Sigma(Z(M)^0, B)$ a deux éléments α et 2α. On vérifie que $G_{2\alpha} = SO(3) \times SO(3)$.

Soit u un élément unipotent de $M(F')$. Pour $\beta \in \Sigma(Z(M)^0, B)$, on définit un terme $\rho^G(\beta, u, B) \in X_*(Z(M)^0) \otimes \mathbb{R}$ par récurrence sur $dim(G_{SC})$. Si $dim(G_{\beta,SC}) < dim(G_{SC})$, on suppose défini $\rho^{G_\beta}(\beta, u, B)$ et on pose $\rho^G(\beta, u, B) = \rho^{G_\beta}(\beta, u, B)$. Si $dim(G_{\beta,SC}) = dim(G_{SC})$, on a $G = G_\beta$ et on est dans la situation (3). On note β' l'unique élément de $\Sigma_{ind}(Z(M)^0)$ qui est de la forme $q\beta$ avec $q \in \mathbb{Q}_{>0}$. Les termes $\rho^G(k\beta, u, B)$ pour $k \geq 2$ ont déjà été définis et on pose

$$(6) \qquad \rho^G(\beta, u, B) = (\sum_{k \geq 1} \rho^G(k\beta', u)) - (\sum_{k \geq 2} \rho^G(k\beta, u, B)),$$

où $\rho^G(k\beta', u)$ est le terme défini en 1.4.

On redescend maintenant à la situation définie sur F. On note $\Sigma(A_M, B)$ l'ensemble des restrictions non nulles à $\mathfrak{a}_M$ d'éléments de $\Sigma(Z(M)^0, B)$. On note cette restriction $\beta \mapsto \beta_{\mathcal{A}_M}$. Soit u un élément unipotent de $M(F)$. Pour $\alpha \in \Sigma(A_M, B)$, on pose

$$\rho^G(\alpha, u, B) = \sum_{\beta \in \Sigma(Z(M)^0, B); \beta_{\mathcal{A}_M} = \alpha} \rho^G(\beta, u, B)_{\mathcal{A}_M}.$$

Pour $\alpha \in \Sigma(A_M, B)$, introduisons l'ensemble des $\beta' \in \Sigma(T)$ tels que la restriction de $B(\beta')^{-1}\beta'$ à $\mathcal{A}_M$ est de la forme $k\alpha$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme précédemment, c'est le système de racines d'un groupe connexe G_α et M s'identifie à un groupe de Levi de G_α. On peut munir ce groupe d'une structure sur F de la façon suivante. Tout d'abord, parce que l'action galoisienne quasi-déployée (comme l'action naturelle) est triviale sur A_M, la propriété d'invariance de B implique que le système de racines de G_α est conservé par cette action. On peut munir conformément le groupe G_α d'une action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G_\alpha^*}$ quasi-déployée sur F. On peut imposer que cette action coïncide sur M avec l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G^*}$. On a une égalité $\sigma_G = ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma)^{-1}} \circ \sigma_{G^*}$ où σ_G est l'action naturelle, cf. [I]1.2. Puisque M est un Levi standard, on a $u_{\mathcal{E}}(\sigma) \in M$ et $u_{\mathcal{E}}^{-1}$ est un cocycle à valeurs dans $M/Z(G)$ (muni de l'action quasi-déployée). Il est clair que $Z(G) \subset Z(G_\alpha)$, donc $u_{\mathcal{E}}$ se pousse en un cocycle à valeurs dans $M/Z(G_\alpha)$. On voit alors que la formule $\sigma_{G_\alpha} = ad_{u_{\mathcal{E}}(\sigma)}^{-1} \circ \sigma_{G_\alpha^*}$ munit G_α d'une action galoisienne qui coïncide sur M avec l'action naturelle. En dévissant les définitions, on vérifie l'égalité

(7) $\rho^G(\alpha, u, B) = \rho^{G_\alpha}(\alpha, u, B)$.

Il y a une bijection entre les sous-ensembles d'éléments indivisibles $\Sigma_{ind}(A_M)$ et $\Sigma_{ind}(A_M, B)$. A un élément $\alpha' \in \Sigma_{ind}(A_M)$, on associe l'unique élément α de $\Sigma_{ind}(A_M, B)$ tel que $\alpha = q\alpha'$ avec $q \in \mathbb{Q}_{>0}$. Pour α' et α se correspondant ainsi, on a

$$(8) \qquad \sum_{n \geq 1} \rho^G(n\alpha', u) = \sum_{n \geq 1} \rho^G(n\alpha, u, B).$$

Preuve. Le membre de gauche est la somme des $\rho^G(\beta', u)_{\mathcal{A}_M}$ pour $\beta' \in \Sigma(Z(M)^0)$ se restreignant en un multiple positif de α'. Ou encore

$$\sum_{\beta' \in \Sigma_{ind}(Z(M)^0); \beta'_{\mathcal{A}_M} \in \mathbb{N}_{>0}\alpha'} \sum_{n \geq 1} \rho^G(n\beta', u)_{\mathcal{A}_M}.$$

De même, le membre de droite est

$$\sum_{\beta \in \Sigma_{ind}(Z(M)^0, B); \beta_{\mathcal{A}_M} \in \mathbb{N}_{>0}\alpha} \sum_{n \geq 1} \rho^G(n\beta, u, B)_{\mathcal{A}_M}.$$

Il y a une bijection similaire à la précédente entre $\Sigma_{ind}(Z(M)^0)$ et $\Sigma_{ind}(Z(M)^0, B)$. Il est clair que si $\beta' \mapsto \beta$ par cette bijection, β' se restreint en un multiple positif de α' si et seulement si β se restreint en un multiple positif de α. Il suffit de fixer β' et β indivibles et se correspondant et de prouver l'égalité

$$\sum_{n \geq 1} \rho^G(n\beta', u) = \sum_{n \geq 1} \rho^G(n\beta, u, B).$$

On introduit le Levi M' engendré par M et les espaces radiciels associés aux $n\beta'$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Il résulte des définitions que les termes ci-dessus ne changent pas si l'on remplace G par M'. Cela nous ramène au cas où M est propre maximal. Mais alors, la relation cherchée résulte de la définition (6). $\square$

Nos termes $\rho^G(\alpha, u, B)$ vérifient une propriété analogue à 1.4(4). Précisément, dans la situation de cette relation, pour $\alpha' \in \Sigma(A_L, B)$, on a l'égalité

(9) $\rho^G(\alpha', u', B) = \sum_{\alpha \in \Sigma(A_M, B); \alpha_L = \alpha'} \rho^G(\alpha, u, B)_L$.

Preuve. On introduit le groupe $G_{\alpha'}$ comme ci-dessus, relatif au Levi L. On voit facilement, en utilisant la relation (7) ci-dessus que les deux membres de (9) ne changent pas si l'on remplace G par $G_{\alpha'}$. Cela nous ramène par récurrence au cas où $G_{\alpha'} = G$. Dans ce cas, L est un Levi propre maximal et $\alpha' \in \Sigma_{ind}(A_L, B)$. Pour $n \geq 2$, on a déjà démontré la relation (9) relative à $n\alpha'$. La relation à démontrer est donc équivalente à

$$(10) \qquad \sum_{n \geq 1} \rho^G(n\alpha', u', B) = \sum_{n \geq 1} \sum_{\alpha \in \Sigma(A_M, B); \alpha_L = n\alpha'} \rho^G(\alpha, u, B)_L.$$

On peut écrire le membre de droite comme

$$\sum_{\alpha \in \Sigma_{ind}(A_M, B); \alpha_L \in \mathbb{N}_{>0}\alpha'} \sum_{n \geq 1} \rho^G(n\alpha, u, B)_L.$$

Notons ici β' l'élément de $\Sigma_{ind}(A_L)$ qui correspond à α'. En utilisant (8), c'est égal à

$$\sum_{\beta\in\Sigma_{ind}(A_M);\beta_L\in\mathbb{N}_{>0}\beta'}\sum_{n\geq 1}\rho^G(n\beta,u)_L.$$

Ou encore à

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{\beta\in\Sigma(A_M);\beta_L=n\beta'}\rho^G(\beta,u)_L.$$

D'après 1.4(4), c'est aussi

$$\sum_{n\geq 1}\rho^G(n\beta',u).$$

Toujours d'après (8), c'est aussi le membre de gauche de (10). Cela prouve (9). $\square$

A l'aide des constructions ci-dessus, on peut définir des variantes $J_M^G(u,B,f)$ et $I_M^G(u,B,f)$ des intégrales orbitales de 1.5 et 1.6. Nous ne donnons pas les preuves nécessaires car elles sont identiques à celles que nous ferons dans le paragraphe suivant. Un élément $\alpha\in\Sigma(A_M,B)$ est une forme linéaire sur $\mathfrak{a}_M$ et n'appartient pas forcément à $X^*(A_M)$. Toutefois, il existe un entier $n\geq 1$ tel que $n\alpha\in X^*(A_M)$. Pour $a\in A_M(F)$ assez proche de 1, on peut définir $\alpha(a)$ de la façon suivante. On choisit un entier $n\geq 1$ tel que $n\alpha\in X^*(A_M)$, on écrit $a=exp(H)$ avec $H\in\mathfrak{a}_M(F)$ proche de 0 et on pose $\alpha(a)=exp(\frac{(n\alpha)(H)}{n})$. Pour un élément unipotent $u\in M(F)$, pour $a\in A_M(F)$ en position générale et proche de 1, pour $P\in\mathcal{P}(M)$ et pour $\lambda\in i\mathcal{A}_M$, posons

$$r_P(u,a,B;\lambda)=\prod_{\alpha\in\Sigma(A_M,B);\alpha>_P 0}|\alpha(a)-\alpha(a)^{-1}|_F^{<\lambda,\rho^G(\alpha,u,B)>/2}.$$

La collection $(r_P(u,a,B;\lambda))_{P\in\mathcal{P}(M)}$ est une (G,M)-famille dont on déduit un terme $r_M^G(u,a,B)$ comme en 1.5. Supposons fixé un sous-groupe compact spécial en bonne position relativement à M. Pour $f\in C_c^\infty(G(F))$, la fonction

$$a\mapsto\sum_{L\in\mathcal{L}(M)}r_M^L(u,a,B)J_L^G(au,f)$$

a une limite quand a tend vers 1 parmi les éléments de $A_M(F)$ en position générale. On note $J_M^G(u,B,f)$ cette limite. L'intégrale invariante $I_M^G(u,B,f)$ s'en déduit comme en 1.6. Ces termes vérifient des propriétés analogues aux termes $J_M^G(u,f)$ et $I_M^G(u,f)$. Plus canoniquement, on définit $I_M^G(\boldsymbol{\gamma},B,\mathbf{f})$ pour $\boldsymbol{\gamma}\in D_{unip}(M(F))\otimes Mes(M(F))^*$ et $\mathbf{f}\in I(G(F))\otimes Mes(G(F))^*$, où $D_{unip}(M(F))$ est le sous-espace des éléments de $D_{géom}(M(F))$ à support unipotent.

1.9 Variantes des intégrales orbitales pondérées dans le cas quasi-déployé à torsion intérieure

On suppose dans ce paragraphe $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Rappelons que l'on note $\tilde{G}_{ss}$ l'ensemble des éléments semi-simples de $\tilde{G}$. On appelle système de fonctions B la donnée pour tout $\eta\in\tilde{G}_{ss}(F)$ d'une fonction B_η sur le système de racines de G_η de sorte que les conditions (1) et (2) suivantes soient vérifiées.

(1) Pour tout $\eta\in\tilde{G}_{ss}(F)$, B_η vérifie les conditions de 1.8.

Soient $\eta \in \tilde{G}_{ss}(F)$ et $x \in G$ tel que $x\sigma(x)^{-1} \in G_\eta$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Posons $\eta' = ad_{x^{-1}}(\eta)$. Alors $\eta' \in \tilde{G}_{ss}(F)$ et ad_x est un torseur intérieur de $G_{\eta'}$ sur G_η qui permet d'identifier les systèmes de racines de ces deux groupes, munis de leurs actions quasi-déployées. On demande

(2) par cette identification, $B_{\eta'}$ s'identifie à B_η.

Fixons un tel système de fonctions. Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. On fixe des mesures de Haar sur tous les groupes intervenant. Pour $\gamma \in \tilde{M}(F)$, on va définir une distribution $f \mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, B, f)$ sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$. Si γ est $\tilde{G}$-équisingulier, on pose $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, B, f) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, f)$. Passons au cas général. On écrit $\gamma = u\eta$, avec $\eta \in \tilde{M}_{ss}(F)$ et $u \in M_\eta(F)$. On note $\Sigma(A_M, B_\eta)$ l'ensemble des restrictions non nulles à $\mathfrak{a}_M$ d'éléments de $\Sigma(A_{M_\eta}, B_\eta)$. Pour $\alpha \in \Sigma(A_M, B_\eta)$, on pose

$$(3) \qquad \rho(\alpha, \gamma, B) = \sum_{\beta \in \Sigma(A_{M_\eta}, B_\eta); \beta_{\mathcal{A}_M} = \alpha} \rho^{G_\eta}(\beta, u, B_\eta)_M.$$

On définit comme à la fin de 1.8 une fonction $a \mapsto \alpha(a)$ sur un voisinage assez petit de 1 dans $A_{\tilde{M}}(F)$. Pour a en position générale et assez proche de 1, on définit ensuite une $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille $(r_{\tilde{P}}(\gamma, a, B; \lambda))_{\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})}$ par

$$r_{\tilde{P}}(\gamma, a, B; \lambda) = \prod_{\alpha \in \Sigma(A_{\tilde{M}}, B_\eta); \alpha >_P 0} |\alpha(a) - \alpha(a)^{-1}|_F^{<\lambda, \rho(\alpha, \gamma, B)>/2}.$$

On en déduit comme toujours un nombre $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, a, B)$. On a

(4) la fonction

$$a \mapsto \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma, a, B) I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(a\gamma, B, f)$$

a une limite quand a tend vers 1 parmi les éléments de $A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale.

Preuve. On introduit la $(\tilde{G}, \tilde{M})$-famille $(c_{\tilde{P}}(\gamma, a, B; \lambda))_{\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})}$ telle que $r_{\tilde{P}}(\gamma, a, B; \lambda) = c_{\tilde{P}}(\gamma, a, B; \lambda) r_{\tilde{P}}(\gamma, a; \lambda)$. Pour tout $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$, on a l'égalité

$$r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma, a, B) = \sum_{\tilde{R} \in \mathcal{L}^{\tilde{L}}(\tilde{M})} c_{\tilde{M}}^{\tilde{R}}(\gamma, a, B) r_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(\gamma, a).$$

La fonction que l'on considère est donc

$$a \mapsto \sum_{\tilde{R} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} c_{\tilde{M}}^{\tilde{R}}(\gamma, a, B) \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{R})} r_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(\gamma, a) I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(a\gamma, f).$$

La relation 1.7(12) montre que, pour tout $\tilde{R}$, la somme intérieure a une limite quand a tend vers 1. Il suffit de prouver que $c_{\tilde{M}}^{\tilde{R}}(\gamma, a, B)$ a aussi une limite et il suffit encore de prouver que, pour tout $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$, $c_{\tilde{P}}(\gamma, a, B; \lambda)$ a une limite. D'après les définitions, on a

$$r_{\tilde{P}}(\gamma, a; \lambda) = \prod_{\beta' \in \Sigma^{G_\eta}(A_{M_\eta}); \beta'_{\mathcal{A}_M} >_P 0} |\beta'(a) - \beta'(a)^{-1}|_F^{<\lambda, \rho^{G_\eta}(\beta', u)>/2}$$

et

$$r_{\tilde{P}}(\gamma, a, B; \lambda) = \prod_{\beta \in \Sigma^{G_\eta}(A_{M_\eta}, B_\eta); \beta_{\mathcal{A}_M} >_P 0} |\beta(a) - \beta(a)^{-1}|_F^{<\lambda, \rho^{G_\eta}(\beta, u, B_\eta)>/2}.$$

On peut récrire ces formules

$$r_{\tilde{P}}(\gamma,a;\lambda)=\prod_{\beta'\in\Sigma_{ind}^{G_\eta}(A_{M_\eta});\beta'_{\mathcal{A}_M}>_P0}\prod_{n\geq1}|\beta'(a)^n-\beta'(a)^{-n}|_F^{<\lambda,\rho^{G_\eta}(n\beta',u)>/2}$$

et

$$r_{\tilde{P}}(\gamma,a,B;\lambda)=\prod_{\beta\in\Sigma_{ind}^{G_\eta}(A_{M_\eta},B_\eta);\beta_{\mathcal{A}_M}>_P0}\prod_{n\geq1}|\beta(a)^n-\beta(a)^{-n}|_F^{<\lambda,\rho^{G_\eta}(n\beta,u,B_\eta)>/2}.$$

Ces fonctions ont les mêmes singularités en $a=1$ que les fonctions

$$\prod_{\beta'\in\Sigma_{ind}^{G_\eta}(A_{M_\eta});\beta'_{\mathcal{A}_M}>_P0}|\beta'(a)-\beta'(a)^{-1}|_F^{<\lambda,\sum_{n\geq1}\rho^{G_\eta}(n\beta',u)>/2}$$

et

$$\prod_{\beta\in\Sigma_{ind}^{G_\eta}(A_{M_\eta},B_\eta);\beta_{\mathcal{A}_M}>_P0}|\beta(a)-\beta(a)^{-1}|_F^{<\lambda,\sum_{n\geq1}\rho^{G_\eta}(n\beta,u,B_\eta)>/2}.$$

Il y a une bijection entre les ensembles d'éléments indivisibles $\Sigma_{ind}^{G_\eta}(A_{M_\eta})$ et $\Sigma_{ind}^{G_\eta}(A_{M_\eta},B_\eta)$: à un élément $\beta'\in\Sigma_{ind}^{G_\eta}(A_{M_\eta})$, on associe l'unique élément indivisible β de $\Sigma^{G_\eta}(A_{M_\eta},B_\eta)$ qui soit de la forme $q\beta'$ avec $q\in\mathbb{Q}$, $q>0$. Cette bijection préserve la positivité pour P. Si β correspond à β' par la bijection ci-dessus, les fonctions $|\beta'(a)-\beta'(a)^{-1}|_F$ et $|\beta(a)-\beta(a)^{-1}|_F$ ont même singularité. De plus, d'après 1.8(8), on a l'égalité

$$\sum_{k\geq1}\rho(k\beta',u)=\sum_{k\geq1}\rho(k\beta,u,B_\eta).$$

On conclut que le rapport $c_{\tilde{P}}(\gamma,a,B,\lambda)$ est régulier en $a=1$. $\square$

On définit $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,B,f)$ comme la limite de la fonction (4).

En reprenant la preuve ci-dessus et en utilisant le lemme 1.7, on obtient l'égalité

$$(5)\qquad I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,B,f)=\sum_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}c_{\tilde{M}}^{\tilde{R}}(\gamma,1,B)I_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{R}},f),$$

où $\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{R}}$ est la distribution induite par l'intégrale orbitale dans $\tilde{M}$ associée à γ.

En utilisant davantage 1.7(12), on obtient aussi

(6) il existe $r>0$ tel que, pour tout $\gamma\in\tilde{M}(F)$ et tout $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, il existe $C>0$ de sorte que

$$|I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma,B,f)-\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma,a,B)I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(a\gamma,B,f)|\leq Cd(a)^r$$

pour tout $a\in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale et assez proche de 1.

Comme en 1.4, on se débarrasse des mesures en définissant $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},B,\mathbf{f})$ pour $\boldsymbol{\gamma}\in D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F))^*$ et $\mathbf{f}\in C_c^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$, ou $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$.

Les distributions $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},B,\mathbf{f})$ ont les mêmes propriétés (1), (2), (3) et (4) de 1.7. Elles vérifient également le lemme 1.7 et le raffinement 1.7(12). La preuve est la même, en remplaçant l'utilisation de 1.4(4) par celle de 1.8(9).

Remarque. Si B_η est la fonction constante de valeur 1 pour tout $\eta \in \tilde{M}_{ss}(F)$, on a évidemment $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, B, \mathbf{f}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$.

En fait, ces deux distributions sont souvent égales, grâce au lemme suivant. On rappelle que l'on note p la caractéristique résiduelle de F.

Lemme. *Supposons p différent de 2, 3 et 5 et supposons que, pour tout $\eta \in \tilde{M}_{ss}(F)$, les valeurs de la fonction B_η soient premières à p. Alors on a l'égalité*

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, B, \mathbf{f}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$$

pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))^*$ et tout $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$.

Preuve. Il suffit de prouver que, pour tout $\gamma = u\eta \in \tilde{M}(F)$, tout $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$, tout $a \in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale et pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}_{\tilde{M}}$, on a l'égalité

$$r_{\tilde{P}}(\gamma, a, B; \lambda) = r_{\tilde{P}}(\gamma, a; \lambda)$$

pourvu que a soit assez proche de 1. On reprend la preuve de (4) ci-dessus. On y a utilisé les trois propriétés suivantes :

(7) pour $\beta' \in \Sigma^{G_\eta}(A_{M_\eta})$ et $n \geq 1$ tel que $n\beta' \in \Sigma^{G_\eta}(A_{M_\eta})$, la fonction $\frac{|\beta'(a)^n - \beta'(a)^{-n}|_F}{|\beta'(a) - \beta'(a)^{-1}|_F}$ est régulière et non nulle en $a = 1$;

(8) pour $\beta \in \Sigma^{G_\eta}(A_{M_\eta}, B_\eta)$ et $n \geq 1$ tel que $n\beta \in \Sigma^{G_\eta}(A_{M_\eta}, B_\eta)$, la fonction $\frac{|\beta(a)^n - \beta(a)^{-n}|_F}{|\beta(a) - \beta(a)^{-1}|_F}$ est régulière et non nulle en $a = 1$;

(9) pour $\beta' \in \Sigma_{ind}^{G_\eta}(A_{M_\eta})$ et $\beta = q\beta' \in \Sigma_{ind}^{G_\eta}(A_{M_\eta}, B_\eta)$ se correspondant, le fonction $\frac{|\beta'(a) - \beta'(a)^{-1}|_F}{|\beta(a) - \beta(a)^{-1}|_F}$ est régulière et non nulle en $a = 1$.

Pour démontrer l'égalité cherchée, il suffit de prouver que les valeurs en 1 de ces fonctions sont égales à 1. Il suffit pour cela que les entiers n et les rationnels q intervenant soient premiers à p. En considérant tous les systèmes de racines possibles, on vérifie qu'un entier n intervenant dans (7) est forcément inférieur ou égal à 6. Il est donc premier à p d'après l'hypothèse. Considérons un entier n intervenant dans (8). Introduisons un sous-tore maximal T^* de M_η comme en 1.8. D'après les définitions, il y a deux éléments α_1 et α_2 de $\Sigma^{G_\eta}(T^*)$ de sorte que β, resp. $n\beta$, soit la restriction à A_{M_η} de $B_\eta(\alpha_1)^{-1}\alpha_1$, resp. $B_\eta(\alpha_2)^{-1}\alpha_2$. Les éléments α_1 et α_2 se restreignent à A_{M_η} en des multiples $n_1\beta'$ et $n_2\beta'$ d'un même élément indivisible de $\Sigma^{G_\eta}(A_{M_\eta})$. On obtient

$$nn_1 B_\eta(\alpha_1)^{-1} = n_2 B_\eta(\alpha_2)^{-1}.$$

Comme on vient de le dire, les entiers n_1 et n_2 sont premiers à p. Par hypothèse, les valeurs $B_\eta(\alpha_1)$ et $B_\eta(\alpha_2)$ aussi. Donc n est premier à p. Une preuve analogue montre qu'un rationnel q intervenant dans (9) est premier à p. $\square$

1.10 Intégrales orbitales pondérées invariantes stables

On suppose ici que $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure. On fixe toujours un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ et on fixe un système de fonctions B comme en 1.9 . On a défini l'espace $D_{géom}^{st}(\tilde{M}(F))$ des distributions géométriques stables sur $\tilde{M}(F)$. Pour $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom}^{st}(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))^*$, on va définir une forme linéaire $\mathbf{f} \mapsto S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f})$ sur

$C_c^\infty(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$. Conformément à ce que l'on a dit en 1.1, la définition se fait par récurrence sur $dim(G_{SC})$. Pour poser cette définition, il est nécessaire de connaître par récurrence certaines propriétés de cette forme linéaire.

La propriété difficile est

(1) la forme linéaire $\mathbf{f} \mapsto S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f})$ est stable, c'est-à-dire se factorise en une forme linéaire sur $SI(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$.

Les autres propriétés sont formelles et faciles. Pour $b \in C_c^\infty(\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F})$, on a

(2) $S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}(b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}})) = S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f})$ pourvu que b vaille 1 sur l'image par $\tilde{H}_{\tilde{G}}$ du support de $\boldsymbol{\delta}$.

Pour simplifier, fixons des mesures de Haar sur tous les groupes intervenant. Considérons des extensions compatibles

$$1 \to C_\natural \to G_\natural \to G \to 1 \text{ et } \tilde{G}_\natural \to \tilde{G}$$

où $C_\natural$ est un tore central induit et où $\tilde{G}_\natural$ est encore à torsion intérieure. Soit $\lambda_\natural$ un caractère de $C_\natural(F)$. On définit les espaces $C_{c,\lambda_\natural}^\infty(\tilde{G}_\natural(F))$ et $D_{géom,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(F))$. Il y a un homomorphisme naturel

$$(3) \qquad \begin{array}{ccc} D_{géom}(\tilde{G}_\natural(F)) & \to & D_{géom,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(F)) \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} & \mapsto & \boldsymbol{\gamma} \end{array}$$

que l'on peut définir par la formule suivante. Pour $\dot{\boldsymbol{\gamma}} \in D_{géom}(\tilde{G}_\natural(F))$ et $f \in C_{c,\lambda_\natural}^\infty(\tilde{G}_\natural(F))$, on pose $I_{\tilde{G}_\natural}(\boldsymbol{\gamma}, f) = I_{\tilde{G}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}, f(b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}_\natural}))$ où b est n'importe quel élément de $C_c^\infty(\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}_\natural,F})$ valant 1 sur la projection du support de $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$. Remarquons que $f(b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}})$ est à support compact dans $\tilde{G}_\natural(F)$. La définition ci-dessus ne dépend pas du choix de b. Il est utile de donner une autre définition. L'intégration définit un homomorphisme

$$(4) \qquad \begin{array}{ccc} C_c^\infty(\tilde{G}_\natural(F)) & \to & C_{c,\lambda_\natural}^\infty(\tilde{G}_\natural(F)) \\ \dot{f} & \mapsto & f \end{array}$$

Précisément, $f(\gamma') = \int_{C_\natural(F)} \dot{f}^c(\gamma')\lambda_\natural(c)dc$ pour tout $\gamma' \in \tilde{G}_\natural(F)$, où $\dot{f}^c(\gamma') = \dot{f}(c\gamma')$. On remarque que l'ensemble des c pour lesquels $\dot{f}^c(b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}_\natural})$ n'est pas nulle est compact. Il en résulte que

$$I_{\tilde{G}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}, f(b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}_\natural})) = I_{\tilde{G}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \int_{C_\natural(F)} \dot{f}^c(b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}_\natural})\lambda_\natural(c)dc) = \int_{C_\natural(F)} I_{\tilde{G}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \dot{f}^c(b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}_\natural}))\lambda_\natural(c)dc$$

$$= \int_{C_\natural(F)} I_{\tilde{G}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \dot{f}^c)\lambda_\natural(c)dc.$$

Autrement dit,

$$I_{\tilde{G}_\natural}(\boldsymbol{\gamma}, f) = \int_{C_\natural(F)} I_{\tilde{G}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \dot{f}^c)\lambda_\natural(c)dc.$$

L'homomorphisme (3) est surjectif (les intégrales orbitales qui engendrent l'espace d'arrivée sont clairement dans l'image). Le groupe $C_\natural(F)$ agit sur $C_c^\infty(\tilde{G}_\natural(F))$ par $(c, \dot{f}) \mapsto \dot{f}^c$. On en déduit une action duale sur $D_{géom}(\tilde{G}_\natural(F))$ de sorte que $I_{\tilde{G}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}^c, \dot{f}^c) = I_{\tilde{G}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \dot{f})$. On vérifie en utilisant la deuxième forme de la définition que le noyau de l'homomorphisme (3) est engendré par les $\dot{\boldsymbol{\gamma}}^c - \lambda_\natural(c)\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ pour $\dot{\boldsymbol{\gamma}} \in D_{géom}(\tilde{G}_\natural(F))$ et $c \in C_\natural(F)$. Il est peut-être moins clair que

(5) $D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(F))$ est l'image de $D^{st}_{g\acute{e}om}(\tilde{G}_\natural(F))$ par l'homomorphisme (3).

Preuve. Soient $\dot{\boldsymbol{\delta}} \in D^{st}_{g\acute{e}om}(\tilde{G}_\natural(F))$ et $f \in C^\infty_{c,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(F))$ dont toutes les intégrales orbitales régulières stables sont nulles. On a $I_{\tilde{G}_\natural}(\boldsymbol{\delta}, f) = I_{\tilde{G}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\delta}}, f(b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}}))$ où b est comme ci-dessus. Il est clair que toutes les intégrales orbitales régulières stables de $f(b\circ \tilde{H}_{\tilde{G}})$ sont elles-aussi nulles. Donc $I_{\tilde{G}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\delta}}, f(b\circ \tilde{H}_{\tilde{G}})) = 0$, donc $I_{\tilde{G}_\natural}(\boldsymbol{\delta}, f) = 0$ donc $\boldsymbol{\delta}$ est stable. Inversement, soit $\dot{\boldsymbol{\delta}} \in D_{g\acute{e}om}(\tilde{G}_\natural(F))$ tel que $\boldsymbol{\delta}$ soit stable. Introduisons le groupe dérivé $G_{\natural,der}$. Le groupe $C_\natural(F)$ agit sur $G_{\natural,der}(F)\backslash\tilde{G}_\natural(F)$. En ajoutant à $\dot{\boldsymbol{\delta}}$ un élément du noyau de l'homomorphisme (3), on peut supposer que l'image du support de $\dot{\boldsymbol{\delta}}$ dans $G_{\natural,der}(F)\backslash\tilde{G}_\natural(F)$ est de la forme $\{x_1, ..., x_n\}$ où, pour $i \neq j$, x_i et x_j ne sont pas dans la même orbite pour l'action de $C_\natural(F)$. L'intersection $\Delta = C_\natural(F) \cap G_{\natural,der}(F)$ est finie. Quitte à moyenner sur ce groupe, ce qui ne change pas $\boldsymbol{\delta}$, on peut supposer $\dot{\boldsymbol{\delta}}^c = \lambda_\natural(c)\dot{\boldsymbol{\delta}}$ pour $c \in \Delta$. On va montrer qu'alors, $\dot{\boldsymbol{\delta}}$ est stable. Soit $\dot{f} \in C^\infty_c(\tilde{G}_\natural(F))$ dont toutes les intégrales orbitales régulières stables sont nulles. Introduisons sa moyenne $\dot{f}_0$ sur le groupe Δ de sorte que $\dot{f}_0^c = \lambda_\natural(c)^{-1}\dot{f}_0$ pour $c \in \Delta$. Ses intégrales orbitales régulières stables sont nulles elles-aussi. Fixons un supplémentaire $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{c}_\natural(F)$ dans $\mathfrak{z}_{G_\natural}(F)$ et un voisinage ouvert $\mathfrak{U}$ de 0 dans $\mathfrak{s}$. Posons $U = exp(\mathfrak{U})$. Pour tout $i = 1, ..., n$, choisissons $\delta_i \in \tilde{G}_\natural(F)$ se projetant sur x_i et considérons l'application

$$\begin{array}{llll} p_i: & U \times C_\natural(F) \times G_{\natural,der}(F) & \to & \tilde{G}_\natural(F) \\ & (u, c, g) & \mapsto & ucg\delta_i. \end{array}$$

Elle est continue et ouverte. En choisissant $\mathfrak{U}$ assez petit, on peut supposer que p_i se quotiente en un isomorphisme de $\Delta\backslash(U \times C_\natural(F) \times G_{\natural,der}(F))$ sur son image, où Δ agit sur $U \times C_\natural(F) \times G_{\natural,der}(F)$ via son plongement antidiagonal dans $C_\natural(F) \times G_{\natural,der}(F)$. On peut aussi supposer que, pour $i \neq j$, les images de p_i et p_j sont d'adhérences disjointes. Fixons une fonction $\varphi \in C^\infty_c(U)$ telle $\varphi(1) = 1$. Définissons une fonction f_i sur $U \times C_\natural(F) \times G_{\natural,der}(F)$ par

$$f_i(u, c, g) = \lambda_\natural(c)^{-1}\varphi(u)\dot{f}_0(g\delta_i).$$

A cause de la propriété de transformation de $\dot{f}_0$ par Δ, f_i se factorise par l'application p_i. On peut donc définir une fonction f sur $\tilde{G}_\natural(F)$ qui est nulle hors de la réunion des images des p_i et qui vérifie $f \circ p_i = f_i$ pour tout i. Cette fonction appartient à $C^\infty_{c,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(F))$. Les intégrales orbitales régulières stables de f sont nulles. En effet, cette condition se lit sur les fibres de l'application

$$\tilde{G}_\natural(F) \to G_{\natural,der}(F)\backslash\tilde{G}_\natural(F).$$

Or, sur une telle fibre, f coïncide à une translation près avec un multiple de la restriction de $\dot{f}_0$ à une fibre au-dessus de l'un des x_i. Par ailleurs, sur une telle fibre au-dessus de l'un des x_i, f coïncide exactement avec $\dot{f}_0$. En appliquant la définition, on en déduit que $I_{\tilde{G}_\natural}(\boldsymbol{\delta}, f) = I^{\tilde{G}}(\dot{\boldsymbol{\delta}}, \dot{f}_0)$. Puisque $\boldsymbol{\delta}$ est stable, le premier membre de cette égalité est nul, donc aussi le deuxième. Puisque l'on a pris soin de moyenner $\dot{\boldsymbol{\delta}}$, on a aussi $I^{\tilde{G}}(\dot{\boldsymbol{\delta}}, \dot{f}_0) = I^{\tilde{G}}(\dot{\boldsymbol{\delta}}, \dot{f})$. Donc $I^{\tilde{G}}(\dot{\boldsymbol{\delta}}, \dot{f}) = 0$, ce qu'il fallait démontrer. □

Soient $\dot{\eta} \in \tilde{G}_{\natural,ss}(F)$ et η son image dans $\tilde{G}_\natural(F)$. Les groupes $G_{\natural,\dot{\eta}}$ et G_η ont le même système de racines. On peut identifier la fonction B_η à une fonction sur le système de racines du premier groupe. Cela munit $\tilde{G}_\natural$ d'un système de fonctions que nous notons encore B.

Soit $\tilde{M}_\natural$ l'espace de Levi de $\tilde{G}_\natural$ associé à $\tilde{M}$. Pour $\dot{\boldsymbol{\delta}} \in D^{st}_{g\acute{e}om}(\tilde{M}_\natural(F))$ et $f \in C^\infty_{c,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(F))$, posons

$$S^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\boldsymbol{\delta}, B, f) = S^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\delta}}, B, f(b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}_\natural})),$$

où $b \in C_c^\infty(\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}_\natural,F})$ vaut 1 sur la projection du support de $\boldsymbol{\delta}$. Cette définition est loisible d'après la propriété (2). Remarquons que le même raisonnement conduisant à la deuxième définition de l'homomorphisme (3) conduit à une deuxième forme de la définition ci-dessus :

$$S_{\tilde{M}_\natural}^{\tilde{G}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\delta}}, B, f) = \int_{C_\natural(F)} S_{\tilde{M}_\natural}^{\tilde{G}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\delta}}, B, \dot{f}^c)\lambda_\natural(c)dc,$$

où $\dot{f}$ est relié à f par (4). L'une des propriétés requises est :

(6) $S_{\tilde{M}_\natural}^{\tilde{G}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\delta}}, B, f)$ ne dépend que de l'image $\boldsymbol{\delta}$ de $\dot{\boldsymbol{\delta}}$ dans $D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda_\natural}(\tilde{M}_\natural(F))$.

En utilisant (5) et (6), on peut définir $S_{\tilde{M}_\natural,\lambda_\natural}^{\tilde{G}_\natural}(\boldsymbol{\delta}, B, f)$ pour $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda_\natural}(\tilde{M}_\natural(F))$ et $f \in C^\infty_{c,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(F))$, par

$$S_{\tilde{M}_\natural,\lambda_\natural}^{\tilde{G}_\natural}(\boldsymbol{\delta}, B, f) = S_{\tilde{M}_\natural}^{\tilde{G}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\delta}}, B, f)$$

où $\dot{\boldsymbol{\delta}}$ est n'importe quel élément de $D^{st}_{g\acute{e}om}(\tilde{M}_\natural(F))$ d'image $\boldsymbol{\delta}$. La propriété (1) reste vérifiée dans cette situation plus générale.

Considérons maintenant deux couples d'extensions

$$1 \to C_\natural \to G_\natural \to G \to 1 \text{ et } \tilde{G}_\natural \to \tilde{G}$$

$$1 \to C_\flat \to G_\flat \to G \to 1 \text{ et } \tilde{G}_\flat \to \tilde{G}$$

et deux caractères $\lambda_\natural$ et $\lambda_\flat$ vérifiant les hypothèses précédentes. Introduisons le produit fibré $G_{\natural,\flat}$ de $G_\natural$ et $G_\flat$ au-dessus de G et le produit fibré $\tilde{G}_{\natural,\flat}$ de $\tilde{G}_\natural$ et $\tilde{G}_\flat$ au-dessus de $\tilde{G}$. Supposons donné un caractère $\lambda_{\natural,\flat}$ de $G_{\natural,\flat}(F)$ dont la restriction à $C_\natural(F) \times C_\flat(F)$ soit $\lambda_\natural \times \lambda_\flat^{-1}$. Supposons donnée une fonction non nulle $\tilde{\lambda}_{\natural,\flat}$ sur $\tilde{G}_{\natural,\flat}(F)$ qui se transforme selon le caractère $\lambda_{\natural,\flat}$, cf. [I] 2.5(i). On définit un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} C^\infty_{c,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(F)) & \to & C^\infty_{c,\lambda_\flat}(\tilde{G}_\flat(F)) \\ f_\natural & \mapsto & f_\flat \end{array}$$

par $f_\flat(\gamma_\flat) = \tilde{\lambda}_{\natural,\flat}(\gamma_\natural, \gamma_\flat)f_\natural(\gamma_\natural)$, où $\gamma_\natural$ est n'importe quel élément de $\tilde{G}_\natural(F)$ tel que $(\gamma_\natural, \gamma_\flat) \in \tilde{G}_{\natural,\flat}(F)$. Par restriction à M puis dualité, on a aussi un isomorphisme de $D_{g\acute{e}om,\lambda_\natural}(\tilde{M}_\natural(F))$ sur $D_{g\acute{e}om,\lambda_\flat}(\tilde{M}_\flat(F))$, qui se restreint en un isomorphisme entre espace de distributions stables. Pour $f_\natural$ et $f_\flat$, resp. $\boldsymbol{\delta}_\natural$ et $\boldsymbol{\delta}_\flat$, se correspondant par ces isomorphismes, on veut que

(7) $S^{G_\natural}_{M_\natural,\lambda_\natural}(\boldsymbol{\delta}_\natural, B, f_\natural) = S^{G_\flat}_{M_\flat,\lambda_\flat}(\boldsymbol{\delta}_\flat, B, f_\flat)$.

Soient $\mathbf{G}' = (G', \tilde{G}', s)$ une donnée endoscopique de $(G, \tilde{G})$ (on oublie $\mathbf{a}$ qui est trivial) et un Levi de G' associé à $\tilde{M}$ et à sa donnée endoscopique maximale $\mathbf{M}$ (cf. [I] 1.7). On note encore M ce Levi. Soit $\epsilon \in \tilde{G}'(F)$ un élément semi-simple. Alors il lui correspond un élément semi-simple $\eta \in \tilde{G}(F)$ (la preuve est la même que celle du lemme 1.10 de [I]). Le système de racines de G'_ϵ est un sous-système de celui de G_η. On le munit de la restriction de la fonction B_η. On obtient ainsi un système de fonctions sur $G'(F)$ vérifiant encore les hypothèses de 1.9. On note encore B ce système de fonctions. Dans la définition des intégrales orbitales pondérées pour $\tilde{G}$ intervient une mesure que l'on a déduite en 1.2 d'une forme quadratique sur $X_*(T^*) \otimes \mathbb{R}$. Il convient de faire un choix analogue pour $\tilde{G}'$. Si $\mathbf{G}'$ n'est pas elliptique, ce choix n'importe pas. Si $\mathbf{G}'$ est elliptique, on remarque que, sur $\bar{F}$, on peut identifier un tore maximal de G' à T^*. On choisit alors les mesures qui se déduisent de la même forme quadratique sur $X_*(T^*) \otimes \mathbb{R}$. Soient $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{M})$ et

$\mathbf{f}\in SI(\mathbf{G}')$. Fixons des données auxiliaires $G'_1,...,\Delta_1$. Alors $\boldsymbol{\delta}$ s'identifie à un élément de $D_{géom,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F))$ et $\mathbf{f}$ s'identifie à un élément de $SI_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F))$. En vertu de (1) et (6), le terme $S^{\tilde{G}'_1}_{\tilde{M}_1,\lambda_1}(\boldsymbol{\delta},B,\mathbf{f})$ est défini. En vertu de (7), il ne dépend pas du choix des données auxiliaires. On pose

$$S^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\delta},B,\mathbf{f})=S^{\tilde{G}'_1}_{\tilde{M}_1,\lambda_1}(\boldsymbol{\delta},B,\mathbf{f}).$$

On rétablit maintenant les espaces de mesures pour donner des définitions plus canoniques. Considérons une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}=(\hat{B},\hat{T},(\hat{E}_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de $\hat{G}$. Comme on l'a dit en [I] 1.4, on peut modifier l'action galoisienne de Γ_F sur $\hat{G}$ de sorte qu'elle préserve cette paire et on peut introduire l'élément $\hat{\theta}\in\hat{G}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ tel que $ad_{\hat{\theta}}$ conserve cette paire. En choisissant convenablement celle-ci, on peut supposer que $\hat{M}$ est un Levi standard et que le L-espace ${}^L\tilde{M}$ est égal à $(\hat{M}\ltimes W_F)\hat{\theta}$. Pour $s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$, on a défini en [I] 3.3 la donnée endoscopique $\mathbf{G}'(s)$ qui vérifie les hypothèses ci-dessus. On pose

$$i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))=\begin{cases}[Z(\hat{G}'(s))^{\Gamma_F}:Z(\hat{G})^{\Gamma_F}]^{-1}, & \text{si } \mathbf{G}'(s) \text{ est elliptique,}\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Une définition plus générale sera donnée en 1.12.

Après tous ces préliminaires, on peut définir $S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},B,\mathbf{f})$ pour $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{géom}(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F))^*$ et $\mathbf{f}\in C_c^\infty(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$ par l'égalité

$$(8)\qquad S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},B,\mathbf{f})=I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},B,\mathbf{f})-\sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F};s\neq1}i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))S^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\delta},B,\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}).$$

Tous les termes du membre de droite ont été définis grâce aux hypothèses de récurrence.

On doit montrer que le terme ainsi défini vérifie lui-même ces hypothèses. On va le faire ci-dessous en ce qui concerne les propriétés formelles. La propriété (1) est évidemment plus difficile. Formulons-la provisoirement sous la forme d'un théorème à prouver.

Théorème (à prouver). *Pour $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{géom}(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F))^*$, la distribution $\mathbf{f}\mapsto S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},B,\mathbf{f})$ est stable.*

Remarques. (i) Si $\tilde{M}=\tilde{G}$, on a simplement $S^{\tilde{G}}_{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},B,\mathbf{f})=I^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})$ et l'assertion du théorème est tautologique.

(ii) S'il n'y a pas du tout de torsion, c'est-à-dire si $\tilde{G}=G$, et si de plus B_η est constante de valeur 1 pour tout $\eta\in\tilde{G}_{ss}(F)$, le théorème a été prouvé par Arthur pour les éléments $\boldsymbol{\delta}$ dont le support est formé d'éléments fortement $\tilde{G}$-réguliers ([A6] local theorem 1(b)). Nous prouverons dans l'article suivant que le théorème ci-dessus se déduit de celui d'Arthur.

La vérification des propriétés formelles est fastidieuse mais il est peut-être bon de la faire tout-de-même. Dans la suite, on ne fera plus de telles vérifications.

Vérifions (2). Soit $\mathbf{G}'$ une donnée endoscopique relevante et elliptique de $(G,\tilde{G})$. Appliquons [I] 1.12 en se rappelant que le groupe G_0 de ce paragraphe est égal à G puisque $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et sans torsion. On obtient un homomorphisme $N^{G',G}:G'_{ab}(F)\to G_{ab}(F)$ et une application $N^{\tilde{G}',\tilde{G}}:\tilde{G}'_{ab}(F)\to\tilde{G}_{ab}(F)$ compatible à cet homomorphisme. Les applications $H_{\tilde{G}}$ et $\tilde{H}_{\tilde{G}}$ définies sur $G(F)$ et $\tilde{G}(F)$ se factorisent par $G_{ab}(F)$ et $\tilde{G}_{ab}(F)$ et il y a bien sûr une assertion analogue pour les applications $H_{\tilde{G}'}$

et $\tilde{H}_{\tilde{G}'}$. Par ailleurs, il y a un isomorphisme $\mathcal{A}_{\tilde{G}'} \simeq \mathcal{A}_{\tilde{G}}$ puisque $\mathbf{G}'$ est elliptique. En reprenant les définitions, on voit qu'il y a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G'_{ab}(F) & \stackrel{N^{G',G}}{\to} & G_{ab}(F) \\ H_{\tilde{G}'} \downarrow & & \downarrow H_{\tilde{G}} \\ \mathcal{A}_{\tilde{G}',F} & \to & \mathcal{A}_{\tilde{G},F} \end{array}$$

où l'homomorphisme horizontal du bas est la restriction de l'isomorphisme $\mathcal{A}_{\tilde{G}'} \simeq \mathcal{A}_{\tilde{G}}$. On en déduit qu'il y a un diagramme commutatif similaire

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G}'_{ab}(F) & \stackrel{N^{\tilde{G}',\tilde{G}}}{\to} & \tilde{G}_{ab}(F) \\ \tilde{H}_{\tilde{G}'} \downarrow & & \downarrow \tilde{H}_{\tilde{G}} \\ \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G}',F} & \to & \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{G},F} \end{array}$$

où la flèche horizontale du bas est compatible à l'homomorphisme du diagramme précédent. En particulier, elle est injective. Soient $\boldsymbol{\delta}$, $\mathbf{f}$ et b comme dans la relation (2). Pour $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$, on vérifie que le transfert $(\mathbf{f}(b\circ\tilde{H}_{\tilde{G}}))^{\mathbf{G}'(s)}$ est égal à $\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}(b\circ\tilde{H}_{\tilde{G}'(s)})$. Pour $s \neq 1$, les hypothèses de récurrence assurent que

$$S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}(b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}'(s)})) = S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}).$$

D'après 1.7(1), on a aussi

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}(b \circ \tilde{H}_{\tilde{G}})) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}).$$

Il suffit d'appliquer la relation (8) à $\mathbf{f}$ et $\mathbf{f}(b \circ H_{\tilde{G}})$ pour obtenir la relation (2).

Vérifions (6). Soient $\dot{\boldsymbol{\delta}}$ et $\dot{\boldsymbol{\delta}}'$ deux éléments de $D^{st}_{géom}(\tilde{M}_\natural(F))$ ayant même image dans $D^{st}_{géom,\lambda_\natural}(\tilde{M}_\natural(F))$. Soit $f \in C^\infty_{c,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(F))$. On veut montrer que $S^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\delta}}, B, f) = S^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\delta}}', B, f)$. On choisit $\dot{f}$ relié à f par (4). Montrons que

$$(9) \qquad \int_{C_\natural(F)} I^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\delta}}, B, \dot{f}^c)\lambda_\natural(c)dc = \int_{C_\natural(F)} I^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\delta}}', B, \dot{f}^c)\lambda_\natural(c)dc.$$

D'après la description du noyau de l'homomorphisme (3), $\dot{\boldsymbol{\delta}} - \dot{\boldsymbol{\delta}}'$ est une somme de termes $\dot{\boldsymbol{\gamma}}^c - \lambda_\natural(c)\dot{\boldsymbol{\gamma}}$, avec $\dot{\boldsymbol{\gamma}} \in D_{géom}(\tilde{M}_\natural(F))$ et $c \in C_\natural(F)$. Alors (9) résulte de l'égalité

$$I^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}^c, B, \dot{f}^c) = I^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}, B, \dot{f})$$

pour $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ et c comme ci-dessus. On peut supposer que $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ est une intégrale orbitale. La relation 1.9(5) nous ramène alors à prouver l'égalité ci-dessus pour le système de fonctions B dont toutes les valeurs sont égales à 1. Dans ce cas, l'égalité résulte de la même égalité pour les intégrales orbitales pondérées non invariantes (qui est triviale) et de la relation $\phi_{\tilde{L}_\natural}(\dot{f}^c) = (\phi_{\tilde{L}_\natural}(\dot{f}))^c$ pour tout $\tilde{L}_\natural \in \mathcal{L}(\tilde{M}_\natural)$. Cette propriété résulte immédiatement de la définition de l'application $\phi_{\tilde{L}_\natural}$.

On a la suite exacte

$$1 \to Z(\hat{G}) \to Z(\hat{G}_\natural) \to Z(\hat{C}_\natural) \to 1$$

Le groupe $Z(\hat{C}_\natural)^{\Gamma_F}$ est connexe puisque $C_\natural$ est induit. La suite d'invariants

$$1 \to Z(\hat{G})^{\Gamma_F} \to Z(\hat{G}_\natural)^{\Gamma_F} \to Z(\hat{C}_\natural)^{\Gamma_F} \to 1$$

est donc encore exacte. On a une suite analogue en remplaçant $\hat{G}$ par $\hat{M}$ et $\hat{G}_\natural$ par $\hat{M}_\natural$. Puisque $Z(\hat{G}_\natural)^{\Gamma_F}$ se projette surjectivement sur $Z(\hat{C}_\natural)^{\Gamma_F}$, on en déduit l'égalité

$$Z(\hat{M}_\natural)^{\Gamma_F} = Z(\hat{M})^{\Gamma_F} Z(\hat{G}_\natural)^{\Gamma_F}.$$

Autrement dit, l'homomorphisme

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F} \to Z(\hat{M}_\natural)^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}_\natural)^{\Gamma_F}$$

est surjectif. Il est aussi injectif, donc bijectif. Un élément $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$ définit donc à la fois une donnée endoscopique $\mathbf{G}'(s)$ de $(G, \tilde{G})$ et une donnée endoscopique $\mathbf{G}'_\natural(s)$ de $(G_\natural, \tilde{G}_\natural)$. On a une suite exacte

$$1 \to C_\natural \to G'_\natural(s) \to G'(s) \to 1$$

et une application compatible

$$\tilde{G}'_\natural(s) \to \tilde{G}'(s).$$

Par un calcul similaire à celui ci-dessus, on montre que $i_{\tilde{M}_\natural}(\tilde{G}_\natural, \tilde{G}'_\natural(s)) = i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s))$. On simplifie les calculs ultérieurs en remarquant que, pour la donnée $\mathbf{G}'(s)$, on peut choisir des données auxiliaires $G'(s)_1, ..., \Delta(s)_1$ telles que $G'(s)_1 = G'(s)$, $\tilde{G}'(s)_1 = \tilde{G}'(s)$, $C(s)_1 = \{1\}$. Pour le prouver, il suffit de montrer que

(10) $\mathcal{G}'(s)$ est isomorphe à ${}^L G'(s)$.

Remarque. A première vue, cela paraît évident puisque $\mathcal{G}'(s)$ est égal au sous-groupe $\hat{G}'(s) \rtimes W_F$ de ${}^L G$. Mais l'action de W_F sur $\hat{G}'(s)$ est ici la restriction de l'action sur $\hat{G}$. Elle n'est pas équivalente, en général, à l'action sur $\hat{G}'(s)$ considéré comme L-groupe de $G'(s)$. Plus exactement, elle ne conserve pas, en général, un épinglage de $\hat{G}'(s)$ (contre-exemple : $G = U(3)$, s tel que $G'(s) = U(2) \times U(1)$).

Preuve de (10). Soit $\hat{P}$ le sous-groupe parabolique standard de Levi $\hat{M}$. Alors $\hat{P} \cap \hat{G}'(s)$ est un sous-groupe parabolique de $\hat{G}'(s)$, de Levi $\hat{M}$, et il est conservé par l'action de W_F (la restriction de celle sur $\hat{G}$). On prend pour $\hat{B}'$ l'unique Borel contenu dans $\hat{P} \cap \hat{G}'(s)$ qui a même intersection avec $\hat{M}$ que $\hat{B}$. On prend $\hat{T}' = \hat{T}$. On prend pour épinglage $(\hat{E}'_\alpha)_{\alpha \in \hat{\Delta}'(s)}$ un épinglage quelconque contenant $(\hat{E}_\alpha)_{\alpha \in \hat{\Delta}^M}$, où $\hat{\Delta}^M$ est le sous-ensemble de $\hat{\Delta}$ associé à $\hat{M}$. L'action de W_F conserve $\hat{B}'$, $\hat{T}'$ et le sous-ensemble $(\hat{E}'_\alpha)_{\alpha \in \hat{\Delta}^M}$. Elle ne conserve pas, en général, le complémentaire $(\hat{E}'_\alpha)_{\alpha \in \hat{\Delta}'(s) - \hat{\Delta}^M}$. Mais il existe un unique cocycle $\chi_{ad} : W_F \to Z(\hat{M})/Z(\hat{G}'(s))$ tel que l'action $w \mapsto ad_{\chi_{ad}(w)} w_G$ conserve cet épinglage. On peut supposer que l'action de W_F sur $\hat{G}'(s)$ considéré comme le L-groupe de $G'(s)$ est $w \mapsto w_{G'(s)} = ad_{\chi_{ad}(w)} w_G$. Supposons prouvé que χ_{ad} se relève en un cocycle $\chi : W_F \to Z(\hat{M})$. On définit alors une application

$$\begin{array}{llll} \hat{\xi}(s) : & \mathcal{G}'(s) \simeq \hat{G}'(s) \rtimes W_F & \to & {}^L G'(s) \simeq \hat{G}'(s) \rtimes W_F \\ & (x, w) & \mapsto & (x\chi(w)^{-1}, w) \end{array}$$

(les deux produits semi-directs sont relatifs aux deux actions de W_F). C'est un isomorphisme, ce qui prouve (10). Il reste à prouver l'assertion de relèvement. On va en fait prouver que χ_{ad} se relève en un cocycle $\chi_{sc}: W_F \to Z(\hat{M}_{sc})$. Supposons que la condition suivante soit satisfaite :

(11) pour toute racine α de $\hat{T}$ dans $\hat{G}$ et pour tout $w \in W_F$ fixant α, l'action w_G sur l'espace radiciel associé à α soit l'identité.

Dans ce cas, on modifie l'ensemble $(\hat{E}'_\alpha)_{\alpha\in\hat{\Delta}'(s)-\hat{\Delta}^M}$ de la façon suivante. On fixe un ensemble de représentants $\hat{\Delta}'_1$ des orbites de W_F dans $\hat{\Delta}'(s)-\hat{\Delta}^M$. On fixe arbitrairement $\hat{E}'_\alpha$ pour $\alpha \in \hat{\Delta}'_1$. Pour $\alpha \in \hat{\Delta}'(s) - \hat{\Delta}^M$ quelconque, on écrit $\alpha = w_G\alpha_1$ avec $w \in W_F$ et $\alpha_1 \in \hat{\Delta}'_1$ et on pose $\hat{E}'_\alpha = w_G(\hat{E}'_{\alpha_1})$. L'hypothèse (11) assure que cette définition est loisible. L'épinglage obtenu est conservé par W_F. Notons que changer d'épinglage ne change pas la classe du cocycle χ_{ad}. Donc cette classe est triviale. Cela entraîne que χ_{ad} se relève bien en un cocycle χ_{sc}. Revenons maintenant au cas général. L'action galoisienne permute les composantes simples du groupe $\hat{G}_{AD}$ et notre problème se ramène immédiatement au cas où cette action est transitive, donc toutes les composantes simples sont du même type. L'action galoisienne se fait par automorphismes préservant une paire de Borel épinglée. On sait qu'à une exception près, l'hypothèse (11) est satisfaite (auquel cas le problème est résolu), cf. [KS] 1.3. Décrivons l'exception. On considère une tour d'extensions $F_2/F_1/F$, avec F_2/F_1 quadratique, et un groupe linéaire adjoint $\hat{G}_{1,AD} = PGL(2n+1,\mathbb{C})$ muni de l'action de Γ_{F_1} pour laquelle un élément de $\Gamma_{F_1} - \Gamma_{F_2}$ agit par un automorphisme extérieur non trivial. Le groupe $\hat{G}_{AD}$ est déduit de $\hat{G}_{1,AD}$ par changement de base de F_1 à F. Dans ce cas, il y a des couples (α, w) vérifiant les hypothèses de (11) tels que l'action w_G sur l'espace radiciel associé à α soit moins l'identité. En tout cas, la classe de χ_{ad} est d'ordre au plus 2. Puisque $\hat{G}$ n'intervient présentement que via $\hat{G}_{AD}$ et $\hat{G}_{SC}$, on peut supposer que $\hat{G}$ est déduit par changement de base d'un groupe $\hat{G} = GL(2n+1,\mathbb{C})$ muni de l'action similaire à celle ci-dessus. Le groupe $\hat{G}'(s)$ est alors aussi un produit de groupes $GL(k,\mathbb{C})$ et son centre est connexe. De cette connexité résulte que l'homorphisme

$$H^1(W_F, Z(\hat{M})) \to H^1(W_F, Z(\hat{M})/Z(\hat{G}'(s)))$$

est surjectif ([Lan] p. 719 (1)). Relevons χ_{ad} en un cocycle $\chi : W_F \to Z(\hat{M})$. De l'homomorphisme

$$GL(2n+1,\mathbb{C}) \stackrel{det}{\to} GL(1,\mathbb{C}) \simeq Z(GL(2n+1,\mathbb{C}))$$

se déduit un homomorphisme

$$\hat{G} \stackrel{det}{\to} Z(\hat{G}).$$

Posons $\chi_{sc} = (det \circ \chi)^{-1}\chi^{2n+1}$. Parce que χ_{ad} est au plus d'ordre 2, ce cocycle χ_{sc} relève encore la classe de χ_{ad}. Mais χ_{sc} prend ses valeurs dans $Z(\hat{M}_{sc})$. Cela achève la preuve de (10). $\square$

Choisissons donc des données auxiliaires simples $G'(s)_1 = G'(s)$, $\tilde{G}'(s)_1 = \tilde{G}'(s)$, $C(s)_1 = \{1\}$, $\hat{\xi}(s)_1$, $\Delta(s)_1$. La preuve ci-dessus montre qu'il y a vraiment un choix, $\hat{\xi}(s)_1$ n'est pas canonique. Parce qu'on a dû tordre l'action galoisienne par un cocycle à valeurs dans $Z(\hat{M})$, on ne peut pas en général choisir $\Delta(s)_1$ égal à 1 sur la diagonale dans $\tilde{M}(F) \times \tilde{M}(F)$. Le cocycle définit un caractère χ_F de $M(F)$. En fixant un point base $\gamma \in \tilde{M}(F)$, on a une relation $\Delta(s)_1(x\gamma, x\gamma) = \chi_F(x)\Delta(s)_1(\gamma,\gamma)$ pour tout $x \in M(F)$. Quoi qu'il en soit, toute distribution $\boldsymbol{\delta}$ sur $\tilde{M}(F)$, vu comme sous-groupe de $\tilde{G}(F)$, est le transfert d'une distribution $\boldsymbol{\delta}(s)$ sur $\tilde{M}(F)$, vu comme sous-groupe de $\tilde{G}'(s)(F)$.

Pour données auxiliaires de $\mathbf{G}'_\natural(s)$, on choisit $G'_\natural(s)_1 = G'_\natural(s)$, $\tilde{G}'_\natural(s)_1 = \tilde{G}'_\natural(s)$, $C_\natural(s)_1 = \{1\}$. L'homomorphisme $\hat{\xi}(s)_1$ s'étend en un isomorphisme $\hat{\xi}(s)_{\natural,1} : \mathcal{G}'_\natural(s) \to$

${}^L G'_\natural(s)$. Pour simplifier, abandonnons les indices 1 superflus. Notons $\mathcal{D} \subset G'(s)(F)\times G(F)$ et $\mathcal{D}_\natural \subset G'_\natural(s)(F) \times G_\natural(F)$ les ensembles de couples d'éléments réguliers se correspondant. Le groupe $C_\natural(F)$ se plonge diagonalement dans $G'_\natural(s)(F) \times G_\natural(F)$. On voit que l'action de ce groupe diagonal préserve $\mathcal{D}_\natural$ et que le quotient $\mathcal{D}_\natural/diag(C_\natural(F))$ s'identifie par projection à $\mathcal{D}$. Notons $\Delta_\natural(s)$ l'image réciproque de $\Delta(s)$ par cette projection. On vérifie que c'est un facteur de transfert pour les données auxiliaires définies ci-dessus. Ce sont ces données que l'on utilise pour réaliser explicitement les termes $S_{\mathbf{M}_\natural}^{\mathbf{G}'_\natural(s)}(.,.)$.

Pour $c \in C_\natural(F)$, on a l'égalité $(\dot{f}^c)^{\tilde{G}'_\natural(s)} = (\dot{f}^{\tilde{G}'_\natural(s)})^c$: cela résulte de la définition du facteur de transfert. Posons

$$f^{\tilde{G}'_\natural(s)} = \int_{C_\natural(F)} (\dot{f}^{\tilde{G}'_\natural(s)})^c \lambda_\natural(c)dc.$$

Cette fonction appartient à $C^\infty_{c,\lambda_\natural}(\tilde{G}'_\natural(s)(F))$. Alors

$$\int_{C_\natural(F)} S_{\tilde{M}_\natural}^{\tilde{G}'_\natural(s)}(\dot{\boldsymbol{\delta}}(s), B, (\dot{f}^c)^{\tilde{G}'_\natural(s)})\lambda_\natural(c)dc = S_{\tilde{M}_\natural}^{\tilde{G}'_\natural(s)}(\dot{\boldsymbol{\delta}}, B, f^{\tilde{G}'_\natural(s)}).$$

Si $s \neq 1$, on en déduit l'égalité

$$(12) \qquad \int_{C_\natural(F)} S_{\tilde{M}_\natural}^{\tilde{G}'_\natural(s)}(\dot{\boldsymbol{\delta}}(s), B, (\dot{f}^c)^{\tilde{G}'_\natural(s)})\lambda_\natural(c)dc = \int_{C_\natural(F)} S_{\tilde{M}_\natural}^{\tilde{G}'_\natural(s)}(\dot{\boldsymbol{\delta}}'(s), B, (\dot{f}^c)^{\tilde{G}'_\natural(s)})\lambda_\natural(c)dc.$$

En effet, c'est l'égalité (6) où l'on remplace $\tilde{G}_\natural$ par $\tilde{G}'_\natural(s)$ et f par $f^{\tilde{G}'_\natural(s)}$ (puisque $s \neq 1$, on peut appliquer (6) par hypothèse de récurrence).

La relation (6) résulte de (9), (12) et des définitions.

Remarquons que l'on peut définir $I_{\tilde{M}_\natural,\lambda_\natural}^{\tilde{G}_\natural}(\boldsymbol{\gamma}, B, f)$ pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom,\lambda_\natural}(\tilde{M}_\natural(F))$ et $f \in C^\infty_{c,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(F))$, de même que l'on a défini $S_{\tilde{M}_\natural,\lambda_\natural}^{\tilde{G}_\natural}(\boldsymbol{\gamma}, B, f)$. La relation (9) affirme que cette définition est loisible. On a aussi défini ci-dessus un transfert entre $C^\infty_{c,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(F))$ et $C^\infty_{c,\lambda_\natural}(\tilde{G}'_\natural(s;F))$. Avec ces définitions, l'égalité (8) se généralise à $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom,\lambda_\natural}(\tilde{M}_\natural(F))$ et $f \in C^\infty_{c,\lambda_\natural}(\tilde{G}_\natural(F))$. Considérons le cas particulier où $\lambda_\natural$ est le caractère trivial $\mathbf{1}$. Dans ce cas, on a des isomorphismes $C^\infty_{c,\mathbf{1}}(\tilde{G}_\natural(F)) \simeq C^\infty_c(\tilde{G}(F))$, $D_{géom,\mathbf{1}}(\tilde{M}_\natural(F)) \simeq D_{géom}(\tilde{M}(F))$ et $D^{st}_{géom,\mathbf{1}}(\tilde{M}_\natural(F)) \simeq D^{st}_{géom}(\tilde{M}(F))$. Notons ici $f_\natural \mapsto f$ et $\boldsymbol{\gamma}_\natural \mapsto \boldsymbol{\gamma}$ ces isomorphismes. Alors :

(13) soient $\boldsymbol{\delta}_\natural \in D^{st}_{géom,\mathbf{1}}(\tilde{M}_\natural(F))$ et $f_\natural \in C^\infty_{c,\mathbf{1}}(\tilde{G}_\natural(F))$; on a l'égalité

$$S_{\tilde{M}_\natural,\mathbf{1}}^{\tilde{G}_\natural}(\boldsymbol{\delta}_\natural, B, f_\natural) = S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B, f).$$

Cette assertion se décompose en deux :
(14) pour $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$, $s \neq 1$,

$$S_{\tilde{M}_\natural,\mathbf{1}}^{\tilde{G}'_\natural(s)}(\boldsymbol{\delta}_\natural(s), B, (f_\natural)^{\tilde{G}'_\natural(s)}) = S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}(s), B, f^{\tilde{G}'(s)});$$

(15) pour $\boldsymbol{\gamma}_\natural \in D_{géom,\mathbf{1}}(\tilde{M}_\natural(F))$,

$$I_{\tilde{M}_\natural,\mathbf{1}}^{\tilde{G}_\natural}(\boldsymbol{\gamma}_\natural, B, f_\natural) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, B, f).$$

On vérifie sur la définition ci-dessus du transfert que $(f_\natural)^{\tilde{G}'_\natural(s)} = (f^{\tilde{G}'(s)})_\natural$. Donc (14) est la même assertion que (13) avec $\tilde{G}$ remplacé par $\tilde{G}'(s)$. On peut l'admettre par récurrence. Pour (15), on peut supposer que $\boldsymbol{\gamma}$ est une intégrale orbitale associée à un élément $\gamma \in \tilde{M}(F)$. La relation 1.9(5) nous ramène au cas où le système de fonctions B a toutes ses valeurs égales à 1. Fixons $\dot{\gamma}_\natural \in \tilde{M}_\natural(F)$ se projetant sur γ. On vérifie que $\boldsymbol{\gamma}_\natural$ est l'image par l'homomorphisme $D_{géom}(\tilde{M}_\natural(F)) \to D_{géom,\mathbf{1}}(\tilde{M}_\natural(F))$ de l'intégrale orbitale associée à $\dot{\gamma}$. Donc

$$I^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural,\mathbf{1}}(\boldsymbol{\gamma}_\natural, f_\natural) = I^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\gamma}_\natural, f_\natural).$$

Chosissons $\dot{f}_\natural \in C_c^\infty(\tilde{G}_\natural(F))$ tel que

$$f_\natural(\gamma') = \int_{C_\natural(F)} \dot{f}^c_\natural(\gamma')dc$$

pour tout $\gamma' \in \tilde{G}_\natural(F)$. Alors

$$I^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\gamma}_\natural, f_\natural) = \int_{C_\natural(F)} I^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\gamma}_\natural, \dot{f}^c_\natural)dc.$$

On fixe un sous-groupe compact spécial K de $G(F)$ en bonne position relativement à M. Il lui correspond un tel sous-groupe $K_\natural$ de $G_\natural(F)$ (par la bijection entre facettes spéciales des immeubles de G et $G_\natural$). On utilise ces sous-groupes pour définir les intégrales pondérées suivantes. On montre d'abord que

$$(16) \qquad \int_{C_\natural(F)} J^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\gamma}_\natural, \dot{f}^c_\natural)dc = J^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\gamma, f).$$

Si $M_\gamma = G_\gamma$, il suffit d'appliquer les définitions : pour $x_\natural \in G_\natural(F)$ se projetant sur $x \in G(F)$, on a

$$\int_{C_\natural(F)} \dot{f}^c_\natural(x_\natural^{-1}\dot{\gamma}_\natural x_\natural)dc = f(x^{-1}\gamma x)$$

et $v^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(x_\natural) = v^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(x)$. Pour γ quelconque, on vérifie que pour $\tilde{P} \in \mathcal{P}(\tilde{M})$, $a_\natural \in A_{\tilde{M}_\natural}(F)$ se projetant en $a \in A_{\tilde{M}}(F)$ et pour $\lambda \in \mathcal{A}^{\tilde{G}_\natural,*}_{\tilde{M}_\natural,\mathbb{C}} \simeq \mathcal{A}^{\tilde{G},*}_{\tilde{M},\mathbb{C}}$, on a $r^{\tilde{G}_\natural}_{\tilde{P}_\natural}(\dot{\gamma}_\natural, a; \lambda) = r^{\tilde{G}}_{\tilde{P}}(\gamma, a; \lambda)$. L'égalité (16) se déduit alors pour γ par passage à la limite à partir du cas où $M_\gamma = G_\gamma$. Il faut ensuite montrer que pour tout $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$ avec $\tilde{L} \neq \tilde{G}$, on a

$$(17) \qquad \int_{C_\natural(F)} I^{\tilde{L}_\natural}_{\tilde{M}_\natural}(\dot{\gamma}_\natural, \phi_{\tilde{L}_\natural}(\dot{f}^c_\natural))dc = I^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\gamma, \phi_{\tilde{L}}(f)).$$

On a besoin pour cela de propriétés des applications $\phi_{\tilde{L}}$ et $\phi_{\tilde{L}_\natural}$, qui sont essentiellement formelles. A savoir que $\phi_{\tilde{L}_\natural}(\dot{f}^c_\natural) = (\phi_{\tilde{L}_\natural}(\dot{f}_\natural))^c$ comme on l'a déjà dit et que $\phi_{\tilde{L}_\natural}(\dot{f}_\natural)$ et $\phi_{\tilde{L}}(f)$ sont reliées de la même façon que $\dot{f}_\natural$ et f (à ceci près qu'elles ne sont pas à support compact mais appartiennent à des espaces C^∞_{ac} ; le passage à ces espaces ne pose pas de problème). Alors l'égalité (17) n'est autre que (15) où l'on change $\tilde{G}$ en $\tilde{L}$ et f en $\phi_{\tilde{L}}(f)$. On peut l'admettre par récurence. L'assertion (15) résulte de (16), (17) et des définitions. Cela achève la preuve de (13).

Il nous reste à prouver la relation (7). Considérons les extensions

$$1 \to C_\natural \times C_\flat \to G_{\natural,\flat} \to G \to 1 \text{ et } \tilde{G}_{\natural,\flat} \to \tilde{G}$$

ainsi que le caractère $\lambda_\natural\times\boldsymbol{1}_\flat$ de $C_\natural(F)\times C_\flat(F)$, où $\boldsymbol{1}_\flat$ est le caractère trivial de $C_\flat(F)$. On a de nouveau des isomorphismes $C_{c,\lambda_\natural\times\boldsymbol{1}_\flat}^\infty(\tilde G_{\natural,\flat}(F))\simeq C_{c,\lambda_\natural}^\infty(\tilde G_\natural)$, $D_{g\acute{e}om,\lambda_\natural\times\boldsymbol{1}_\flat}^{st}(\tilde M_{\natural,\flat}(F))\simeq D_{g\acute{e}om,\lambda_\natural}(\tilde M_\natural)$. Notons $f_{\natural,\flat}\in C_{c,\lambda_\natural\times\boldsymbol{1}_\flat}^\infty(\tilde G_{\natural,\flat}(F))$ et $\boldsymbol{\delta}_{\natural,\flat}\in D_{g\acute{e}om,\lambda_\natural\times\boldsymbol{1}_\flat}^{st}(\tilde M_{\natural,\flat}(F))$ les éléments auxquels s'identifient $f_\natural$ et $\boldsymbol{\delta}_\natural$. La relation (13) se généralise en

(18) $S_{\tilde M_{\natural,\flat},\lambda_\natural\times\boldsymbol{1}_\flat}^{\tilde G_{\natural,\flat}}(\boldsymbol{\delta}_{\natural,\flat},B,f_{\natural,\flat})=S_{\tilde M_\natural,\lambda_\natural}^{\tilde G_\natural}(\boldsymbol{\delta}_\natural,B,f_\natural)$.

Pour le prouver, on choisit $\dot{\boldsymbol{\delta}}_\natural\in D_{g\acute{e}om}(\tilde M_\natural(F))$ se projetant sur $\boldsymbol{\gamma}_\natural$ par l'homomorphisme (3) et $\dot f_\natural\in C_c^\infty(\tilde G_\natural(F))$ reliée à $f_\natural$ par (4). Alors

$$S_{\tilde M_\natural,\lambda_\natural}^{\tilde G_\natural}(\boldsymbol{\delta}_\natural,B,f_\natural)=\int_{C_\natural(F)}S_{\tilde M_\natural}^{\tilde G_\natural}(\dot{\boldsymbol{\delta}}_\natural,B,\dot f_\natural)\lambda_\natural(c)dc.$$

On identifie $\dot f_\natural$ à un élément de $C_{c,\boldsymbol{1}_\flat}^\infty(\tilde G_{\natural,\flat}(F))$ et on choisit $\dot f_{\natural,\flat}\in C_c^\infty(\tilde G_{\natural,\flat}(F))$ tel que cet élément soit $\int_{C_\flat(F)}\dot f_{\natural,\flat}^{c'}\,dc'$. On identifie $\dot{\boldsymbol{\delta}}_\natural$ à un élément de $D_{g\acute{e}om,\boldsymbol{1}_\flat}^{st}(\tilde M_{\natural,\flat}(F))$ et on choisit $\dot\delta_{\natural,\flat}\in D_{g\acute{e}om}^{st}(\tilde M_{\natural,\flat}(F))$ se projetant sur cet élément. Pour $c\in C_\natural(F)$, (13) implique que

$$S_{\tilde M_\natural}^{\tilde G_\natural}(\dot{\boldsymbol{\delta}}_\natural,B,\dot f_\natural)=\int_{C_\flat(F)}S_{\tilde M_{\natural,\flat}}^{\tilde G_{\natural,\flat}}(\dot{\boldsymbol{\delta}}_{\natural,\flat},B,\dot f_{\natural,\flat}^{c'})dc'.$$

Donc

$$S_{\tilde M_\natural,\lambda_\natural}^{\tilde G_\natural}(\boldsymbol{\delta}_\natural,B,f_\natural)=\int_{C_\natural(F)\times C_\flat(F)}S_{\tilde M_{\natural,\flat}}^{\tilde G_{\natural,\flat}}(\dot{\boldsymbol{\delta}}_{\natural,\flat},B,\dot f_{\natural,\flat}^{cc'})\lambda_\natural(c)\,dc'\,dc.$$

Mais $\dot{\boldsymbol{\delta}}_{\natural,\flat}$ se projette sur $\boldsymbol{\delta}_{\natural,\flat}$ par (3) et $\dot f_{\natural,\flat}$ est relié à $f_{\natural,\flat}$ par (4). Le membre de droite ci-dessus est donc égal à $S_{\tilde M_\natural,\lambda_\natural\times\boldsymbol{1}_\flat}^{\tilde G_\natural}(\boldsymbol{\delta}_\natural,B,f_\natural)$, ce qui prouve (18).

On effectue la même construction à partir de $f_\flat$ et $\boldsymbol{\delta}_\flat$. On obtient des éléments disons $f_{\flat,\natural}\in C_{c,\boldsymbol{1}_\natural\times\lambda_\flat}^\infty(\tilde G_{\natural,\flat}(F))$ et $\boldsymbol{\delta}_{\flat,\natural}\in D_{g\acute{e}om,\boldsymbol{1}_\natural\times\lambda_\flat}^{st}(\tilde M_{\natural,\flat}(F))$ et l'égalité

$$(19)\qquad S_{\tilde M_{\natural,\flat},\boldsymbol{1}_\natural\times\lambda_\flat}^{\tilde G_{\natural,\flat}}(\boldsymbol{\delta}_{\flat,\natural},B,f_{\flat,\natural})=S_{\tilde M_\flat,\lambda_\flat}^{\tilde G_\flat}(\boldsymbol{\delta}_\flat,B,f_\flat).$$

La multiplication par $\tilde\lambda_{\natural,\flat}$ définit un isomorphisme de $C_{c,\lambda_\natural\times\boldsymbol{1}_\flat}^\infty(\tilde G_{\natural,\flat}(F))$ sur $C_{c,\boldsymbol{1}_\natural\times\lambda_\flat}^\infty(\tilde G_{\natural,\flat}(F))$. Par restriction puis dualité, on obtient un isomorphisme de $D_{g\acute{e}om,\lambda_\natural\times\boldsymbol{1}_\flat}^{st}(\tilde M_{\natural,\flat}(F))$ sur $D_{g\acute{e}om,\boldsymbol{1}_\natural\times\lambda_\flat}^{st}(\tilde M_{\natural,\flat}(F))$. Les éléments $f_{\natural,\flat}$ et $f_{\flat,\natural}$, resp. $\boldsymbol{\delta}_{\natural,\flat}$ et $\boldsymbol{\delta}_{\flat,\natural}$, se correspondent par ces isomorphismes. En écrivant les définitions des membres de gauche de (18) et (19), on est ramené au problème suivant, où les extensions ont disparu. On considère un caractère λ de $G(F)$ et une fonction non nulle $\tilde\lambda$ sur $\tilde G(F)$ se transformant selon λ. On considère $\boldsymbol{\delta}\in D_{g\acute{e}om}(\tilde M(F))$ et $f\in C_c^\infty(\tilde G(F))$. On veut prouver

(20) $S_{\tilde M}^{\tilde G}(\tilde\lambda\boldsymbol{\delta},B,\tilde\lambda f)=S_{\tilde M}^{\tilde G}(\boldsymbol{\delta},B,f)$,

où $\boldsymbol{\delta}\mapsto\tilde\lambda\boldsymbol{\delta}$ est l'analogue de l'isomorphisme ci-dessus. Cette assertion se décompose en deux :

(21) $I_{\tilde M}^{\tilde G}(\tilde\lambda\boldsymbol{\delta},B,\tilde\lambda f)=I_{\tilde M}^{\tilde G}(\boldsymbol{\delta},B,f)$;

(22) pour $s\in Z(\hat M)^{\Gamma_F}/Z(\hat G)^{\Gamma_F}$, $s\neq 1$, $S_{\tilde M}^{\tilde G'(s)}((\tilde\lambda\boldsymbol{\delta})(s),B,(\tilde\lambda f)^{\tilde G'(s)})=S_{\tilde M}^{\tilde G'(s)}(\boldsymbol{\delta}(s),B,f^{\tilde G'(s)})$.

Pour (21), on se ramène encore une fois au cas où le système de fonctions B a toutes ses valeurs égales à 1. Dans ce cas, l'assertion similaire pour les intégrales orbitales pondérées non invariantes est immédiate. On doit encore utiliser une propriété formelle des applications $\phi_{\tilde L}$, à savoir que $\phi_{\tilde L}(\tilde\lambda f)=\tilde\lambda\phi_{\tilde L}(f)$. Pour (22), on utilise l'homomorphisme $G'(s)_{ab}(F)\to G_{ab}(F)$ et l'application compatible $\tilde G'(s)_{ab}(F)\to\tilde G_{ab}(F)$.

Grâce à ces applications, λ se restreint en un caractère de $G'(s)(F)$ et $\tilde{\lambda}$ se restreint en une fonction sur $\tilde{G}'(s)(F)$. On vérifie que $(\tilde{\lambda}f)^{\tilde{G}'(s)} = \tilde{\lambda}(f^{\tilde{G}'(s)})$ et, dualement, que $(\tilde{\lambda}\boldsymbol{\delta})(s) = \tilde{\lambda}\boldsymbol{\delta}(s)$. Alors (22) n'est autre que (20) où l'on a remplacé $\tilde{G}$ par $\tilde{G}'(s)$ et f par $f^{\tilde{G}'(s)}$. Par récurrence, on peut admettre (22). Cela achève la preuve de (20) et la vérification des propriétés formelles. $\square$

Dans le cas où le système de fonctions B a toutes ses valeurs égales à 1, on note simplement $S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f})$.

Pour B quelconque, on a

(23) supposons que le support de $\boldsymbol{\delta}$ soit formé d'éléments de $\tilde{M}(F)$ qui sont $\tilde{G}$-équisinguliers ; alors on a l'égalité $S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}) = S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$.

En effet, on a encore $M_\gamma = G'(s)_\gamma$ pour tout élément γ du support et pour tout $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}$. En raisonnant par récurrence, l'assertion résulte de la relation $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$, laquelle résulte des définitions.

1.11 Définition d'un système de fonctions $B^{\tilde{G}}$

On revient au cas où $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quelconque. Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. On peut fixer une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B}, \hat{T}, (\hat{E}_{\hat{\alpha}})_{\hat{\alpha}\in\hat{\Delta}})$ de $\hat{G}$ de sorte que $\tilde{s} = s\hat{\theta}$ avec $s \in \hat{T}$. Introduisons "les" paires de Borel épinglées $\mathcal{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ et $\mathcal{E}' = (B', T', (E'_\alpha)_{\alpha\in\Delta'})$ de G et G'. Le choix de $\hat{\mathcal{E}}$ permet d'identifier T' à $T/(1-\theta)(T)$, cf. [I] 1.5. On fixe $e \in \mathcal{Z}(\tilde{G})$ et on note e' son image dans $\mathcal{Z}(\tilde{G}')$. Soit $\epsilon \in \tilde{G}'_{ss}(F)$. On peut identifier (B', T') à une paire de Borel conservée par ad_ϵ. Alors ϵ s'écrit $\mu e'$, avec $\mu \in T'$ et on relève μ en un élément $\nu \in T$. On utilise les notations de [I] 1.6. En particulier, on note $\Sigma(T)$ l'ensemble des racines de T dans G et $\Sigma^{G'_\epsilon}(T')$ celui des racines de T' dans G'_ϵ. D'après [W2] 3.3, l'ensemble $\Sigma^{G'_\epsilon}(T')$ est alors la réunion des ensembles suivants

(a) les $N\alpha$, pour $\alpha \in \Sigma(T)$ de type 1 tels que $N\alpha(\nu) = 1$ et $N\hat{\alpha}(s) = 1$;

(b) les $2N\alpha$ pour $\alpha \in \Sigma(T)$ de type 2 tels que $N\alpha(\nu) = 1$ et $N\hat{\alpha}(s) = 1$

(c) les $2N\alpha$ pour $\alpha \in \Sigma(T)$ de type 2 tels que $N\alpha(\nu) = -1$ et $N\hat{\alpha}(s) = 1$;

(d) les $N\alpha$ pour $\alpha \in \Sigma(T)$ de type 3 tels que $N\alpha(\nu) = 1$ et $N\hat{\alpha}(s) = -1$.

On définit une fonction $B_\epsilon^{\tilde{G}}$ sur cet ensemble de la façon suivante. Dans le cas (a), $B_\epsilon^{\tilde{G}}(N\alpha) = n_\alpha$ (rappelons que n_α est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $\theta^n(\alpha) = \alpha$). Dans le cas (b), $B_\epsilon^{\tilde{G}}(2N\alpha) = 2n_\alpha$. Dans le cas (c), $B_\epsilon^{\tilde{G}}(2N\alpha) = n_\alpha$. Dans le cas (d), $B_\epsilon^{\tilde{G}}(N\alpha) = 2n_\alpha$.

Lemme. *La fonction $B_\epsilon^{\tilde{G}}$ ne dépend pas des choix faits dans sa construction. Elle vérifie les conditions de 1.8.*

Preuve. La fonction $B_\epsilon^{\tilde{G}}$ vérifie $B_\epsilon^{\tilde{G}}(-\beta) = B_\epsilon^{\tilde{G}}(\beta)$ pour tout $\beta \in \Sigma^{G'_\epsilon}(T')$. Introduisons les groupes de Weyl $W^{G'_\epsilon}$ de G'_ϵ et $W^{G'}$ de G' tous deux relatifs à T' et le groupe de Weyl W de G relatif à T. On a

(1) $W^{G'_\epsilon} \subset \{w \in W^{G'}; w(\mu) = \mu\}$.

En effet, puisque e' commute à tout élément de G', un élément $x \in G'$ vérifie $ad_x(\epsilon) = \epsilon$ si et seulement s'il vérifie $ad_x(\mu) = \mu$.

(2) $W^{G'}$ s'identifie à un sous-groupe de l'ensemble des $w \in W^\theta$ qui fixent l'image de s dans $\hat{T}/(1-\hat{\theta})(\hat{T})$.

Le groupe $W^{G'}$ s'identifie au groupe de Weyl de $\hat{G}'$ relatif à $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$. Un élément $x \in \hat{G}'$ qui normalise ce tore normalise aussi $\hat{T}$. Il vérifie en outre $s\hat{\theta}(x)s^{-1} = x$. Cela entraîne que son image w dans W est fixe par $\hat{\theta}$. On peut alors l'écrire $x = tn$, où $t \in \hat{T}$ et n est fixe par $\hat{\theta}$. Alors on a l'égalité $nsn^{-1} = t^{-1}s\hat{\theta}(t)$, d'où $w(s) \in s(1-\hat{\theta})(\hat{T})$. $\square$

Il résulte de (1) et (2) que l'action sur T' d'un élément de $W^{G'_\epsilon}$ coïncide avec celle d'un élément de W^θ qui conserve l'image de ν dans $T/(1-\theta)(T)$ et celle de s dans $\hat{T}/(1-\hat{\theta})(\hat{T})$. L'action d'un tel élément ne change ni le type d'une racine $\alpha \in \Sigma(T)$, ni le nombre n_α, ni les valeurs $N\alpha(\nu)$ et $N\hat{\alpha}(s)$. D'où l'égalité $B_\epsilon^{\tilde{G}}(w\beta) = B_\epsilon^{\tilde{G}}(\beta)$ pour tout $\beta \in \Sigma^{G'_\epsilon}(T')$ et tout $w \in W^{G'_\epsilon}$.

On complète la paire de Borel $(B' \cap G'_\epsilon, T')$ de G'_ϵ en une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}'_\epsilon$. On introduit les actions galoisiennes quasi-déployées $\sigma \mapsto \sigma_{G'^*_\epsilon}$, resp. $\sigma \mapsto \sigma_{G'^*}$, $\sigma \mapsto \sigma_{G^*}$, de Γ_F sur G'_ϵ, resp. G', G, relatives aux paires de Borel épinglées $\mathcal{E}'_\epsilon$, resp. $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}$. En notant $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ et $\sigma \mapsto \sigma_G$ les actions naturelles sur G' et G, ou $\tilde{G}'$ et $\tilde{G}$, on a des égalités $\sigma_{G'^*_\epsilon} = ad_{u'_\epsilon(\sigma)} \circ \sigma_{G'}$, $\sigma_{G'^*} = ad_{u'(\sigma)} \circ \sigma_{G'}$ et $\sigma_{G^*} = ad_{u(\sigma)} \circ \sigma_G$, où $u'_\epsilon(\sigma) \in G'_\epsilon$, $u'(\sigma) \in G'$ et $u(\sigma) \in G$. On introduit le cocycle $z : \Gamma_F \to Z(G)$ tel que $ad_{u(\sigma)} \circ \sigma_G(e) = z(\sigma)^{-1}e$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. On a

(3) $\sigma_{G'^*_\epsilon}(\mu) = z(\sigma)\mu$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$.

Comme on l'a dit dans la preuve de (1), $u'_\epsilon(\sigma)$ commute à μ puisqu'il commute à ϵ. Donc $\sigma_{G'^*_\epsilon}(\mu) = \sigma_{G'}(\mu)$. Par définition de l'action galoisienne sur $\mathcal{Z}(\tilde{G}')$, on a $\sigma_{G'}(e') = z(\sigma)^{-1}e'$. Puisque $\epsilon \in G'(F)$, on a $\sigma_{G'}(\epsilon) = \epsilon$, c'est-à-dire $\sigma_{G'}(\mu e') = \mu e'$. D'où $\sigma_{G'}(\mu) = z(\sigma)\mu$. $\square$

On a

(4) pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, il existe $w'(\sigma) \in W^{G'}$ tel que l'on ait l'égalité $\sigma_{G'^*_\epsilon} = w'(\sigma) \circ \sigma_{G'^*}$ sur T'.

En effet, $\sigma_{G'^*_\epsilon} = ad_{u'_\epsilon(\sigma)u'(\sigma)^{-1}} \circ \sigma_{G'^*}$. Puisque ces deux actions conservent T', l'élément $u'_\epsilon(\sigma)u'(\sigma)^{-1}$ normalise ce tore et définit l'élément $w'(\sigma)$ cherché.

Pour simplifier, on conserve la notation $\sigma \mapsto \sigma_{G^*}$ pour l'action galoisienne sur $\hat{G}$. On a

(5) pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, il existe $w(\sigma) \in W^\theta$ tel que l'on ait l'égalité $\sigma_{G'^*} = w(\sigma) \circ \sigma_{G^*}$ et que, sur $\hat{T}$, $w(\sigma) \circ \sigma_{G^*}$ conserve l'image de s dans $\hat{T}/Z(\hat{G})(1-\hat{\theta})(\hat{T})$.

Pour $\sigma \in \Gamma_F$, on relève σ en $u \in W_F$ et on choisit $g_u = (g(u), u) \in \mathcal{G}'$ tel que ad_{g_u} coïncide avec $u_{G'^*}$ sur $\hat{G}'$. L'élément $g(u)$ normalise $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$ donc aussi $\hat{T}$. On a $s\hat{\theta}(g(u))\sigma_{G^*}(s)^{-1} = a(u)g(u)$. Cela entraîne que l'image $w(\sigma)$ de $g(u)$ dans W est fixe par $\hat{\theta}$. On peut écrire $g(u) = tn$ avec $t \in \hat{T}$ et n fixe par $\hat{\theta}$. Alors $n\sigma_{G^*}(s)n^{-1} = a(u)^{-1}t^{-1}s\hat{\theta}(t)$, d'où $w(\sigma) \circ \sigma_{G^*}(s) \in sZ(\hat{G})(1-\hat{\theta})(\hat{T})$. L'assertion (5) en résulte. $\square$

Il résulte de (4) et (5) que, pour $\sigma \in \Gamma_F$, $\sigma_{G'^*_\epsilon}$ coïncide sur T' avec $w'(\sigma)w(\sigma)\sigma_{G^*}$. Il résulte de (2), (3) et (5) que cette action conserve l'image de ν dans $T/Z(G)(1-\theta)(T)$ et l'image de s dans $\hat{T}/Z(\hat{G})(1-\hat{\theta})(\hat{T})$. Une telle action ne change ni le type d'une racine $\alpha \in \Sigma(T)$, ni le nombre n_α, ni les valeurs $N\alpha(\nu)$ et $N\hat{\alpha}(s)$. D'où l'égalité $B_\epsilon^{\tilde{G}}(\sigma_{G'^*_\epsilon}(\beta)) = B_\epsilon^{\tilde{G}}(\beta)$ pour tout $\beta \in \Sigma^{G'_\epsilon}(T')$ et tout $\sigma \in \Gamma_F$.

On a ainsi vérifié la première condition de 1.8. Vérifions la seconde. Posons $\Sigma_1 = \Sigma^{G'_\epsilon}(T')$ et notons $\check{\Sigma}_1$ l'ensemble associé de coracines. On considère Σ_1, resp. $\check{\Sigma}_1$, comme un sous-ensemble de $X^*(T'_{\epsilon,SC}) \otimes \mathbb{R}$, resp. $X_*(T'_{\epsilon,SC}) \otimes \mathbb{R}$, où $T'_{\epsilon,sc}$ est l'image réciproque de T' dans $G'_{\epsilon,SC}$. Posons $b = B_\epsilon^{\tilde{G}}$,

$$\Sigma_2 = \{\alpha/b(\alpha); \alpha \in \Sigma_1\},$$

$$\check{\Sigma}_2 = \{b(\alpha)\check{\alpha}; \alpha \in \Sigma_1\},$$

où $\check{\alpha}$ est la coracine associée à α. On a

(6) Σ_2 est un système de racines dont $\check{\Sigma}_2$ est l'ensemble associé de coracines.

En effet, posons $\eta = \nu e \in \tilde{G}$. Si on oublie les actions galoisiennes qui ne comptent pas pour ce que l'on veut prouver, on a construit en [W2] 3.5 un groupe $\bar{H}$ qui est un groupe endoscopique de $G_{\eta,SC}$ et tel que $G'_{\epsilon,SC}$ et $\bar{H}_{SC}$ sont en situation d'endoscopie non standard (cf. [W2] 1.7). Alors Σ_2 est l'ensemble de racines de ce groupe $\bar{H}$ et $\check{\Sigma}_2$ est l'ensemble de coracines associé ([W2] 3.3(2)).

Remarque. La fonction $B^{\tilde{G}}_\epsilon$ a évidemment été définie pour que (6) soit vérifiée.

Il est facile de classifier les triplets (Σ_1, Σ_2, b) vérifiant la condition (6), cf. [W2] 1.7. Il sont produits de triplets analogues tels que Σ_1 et Σ_2 sont irréductibles. Dans le cas irréductible, à homothétie près (c'est-à-dire quitte à multiplier b par un rationnel strictement positif), les possibilités sont les suivantes :

- Σ_1 et Σ_2 sont de même type et b est constante ;
- Σ_1 est de type B_n, C_n, F_4 ou G_2, Σ_2 est respectivement de type C_n, B_n, F_4 ou G_2 et b est le carré de la fonction longueur.

Cela vérifie exactement la seconde condition de 1.8.

On doit montrer que la définition ne dépend pas des choix. On peut voir que changer de choix revient à remplacer composer l'identification de T' à $T/(1-\theta)(T)$ par l'action d'un élément w de W^θ, remplacer ν par un élément de $w(\nu)Z(G)(1-\theta)(T)$ et s par un élément de $w(s)Z(\hat{G})(1-\hat{\theta})(\hat{T})$. On laisse la vérification fastidieuse de ce fait au lecteur. Il est clair qu'une telle modification laisse $B^{\tilde{G}}_\epsilon$ inchangée. $\square$

Pour tout $\epsilon \in \tilde{G}'_{ss}(F)$, on vient de définir une fonction $B^{\tilde{G}}_\epsilon$ sur l'ensemble de racines de G'_ϵ. Il résulte de la définition que ces fonctions vérifient la condition (2) de 1.9. Elles se regroupent donc en un système de fonctions $B^{\tilde{G}}$ sur $\tilde{G}'(F)$ au sens de ce paragraphe.

Soit $\mathbf{G}'_0 = (G'_0, \mathcal{G}'_0, \tilde{s}_0)$ une donnée endoscopique équivalente à $\mathbf{G}'$. Il y a alors un isomorphisme $\tilde{\alpha} : \tilde{G}' \to \tilde{G}'_0$ défini sur F, unique modulo composition avec un automorphisme intérieur (cf. [I] 1.5). Les définitions entraînent que cet isomorphisme est compatible aux systèmes de fonctions $B^{\tilde{G}}$ définis sur $\tilde{G}'(F)$ et $\tilde{G}'_0(F)$.

1.12 Intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes et endoscopie

Soit $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ un triplet quelconque. Soient $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $\tilde{M}$. Comme en [I] 3.2, on réalise ${}^LM$ comme espace de Levi standard de ${}^LG$ et on impose que le cocycle a_M associé à cette donnée prend ses valeurs dans $Z(\hat{G})$ et que sa classe dans $H^1(W_F; Z(\hat{G}))$ est $\mathbf{a}$. Soit $\tilde{s} \in \tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. On construit la donnée endoscopique $\mathbf{G}'(\tilde{s}) = (G'(\tilde{s}), \mathcal{G}'(\tilde{s}), \tilde{s})$, cf. [I] 3.3. On introduit le système de fonctions $B^{\tilde{G}}$ sur $\tilde{G}'(s)(F)$.

Pour $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))^*$ et $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$, on pose

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = \sum_{\tilde{s} \in \tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s})) S^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}, B^{\tilde{G}}, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}).$$

Expliquons cette formule. Le coefficient $i_{M'}(G, G'(\tilde{s}))$ généralise celui du paragraphe 1.10. Il est nul si $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ n'est pas elliptique. Si $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ est elliptique, on pose

$$i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s})) = [Z(\hat{M}')^{\Gamma_F} : (Z(\hat{M}')^{\Gamma_F} \cap Z(\hat{M}))][Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F} : (Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F} \cap Z(\hat{G}))]^{-1}.$$

Pour définir les termes du membre de droite, on a besoin de choisir des mesures sur des espaces analogues à $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$, cf. 1.1. Pour cela, on a fixé une forme quadratique sur $X_*(T^*)\otimes\mathbb{R}$. On remarque que pour chaque groupe $G'(\tilde{s})$ intervenant ci-dessus, un tore maximal $T'(\tilde{s})$ de ce groupe s'identifie sur $\bar{F}$ à $T^*/(1-\theta^*)(T^*)$. Il s'en déduit un isomorphisme $X_*(T'(\tilde{s}))\otimes\mathbb{R}\simeq(X_*(T^*)\otimes\mathbb{R})^{\theta^*}$ On choisit pour forme quadratique sur le premier espace la restriction au second de la forme que l'on a fixée. Si $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ n'est pas quasi-déployé et à torsion intérieure ou si $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure et $\mathbf{M}'\neq\mathbf{M}$, tous les termes $S_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},B^{\tilde{G}},\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})$ sont bien définis grâce aux hypothèses de récurrence posées en 1.1. Si $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure et si $\mathbf{M}'=\mathbf{M}$, un seul terme ne l'est pas, à savoir le terme $S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\delta},B^{\tilde{G}},\mathbf{f}^{\mathbf{G}})$ associé à $\tilde{s}=\tilde{\zeta}=1$. On le remplace dans ce cas par $S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},B^{\tilde{G}},\mathbf{f})$ qui est bien défini. On a dans ce cas la simple égalité $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M},\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})=I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})$.

L'application $\mathbf{f}\to I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})$ se factorise en une application définie sur $I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$.

Remarque. Conformément à [I] 3.3(2), en supposant $\hat{M}$ standard, on pourrait aussi sommer sur

$$\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/(Z(\hat{G})^{\Gamma_F}(1-\hat{\theta})(Z(\hat{M})^{\Gamma_F})),$$

(ou plus canoniquement sur $\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$ à conjugaison près par $Z(\hat{M})^{\Gamma_F}$) à condition de multiplier les coefficients par $|det((1-\theta^{\tilde{M}})_{\mathcal{A}_M/(\mathcal{A}_{\tilde{M}}+\mathcal{A}_G)}|$.

Donnons une autre définition du coefficient $i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))$. On suppose $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ elliptique. Parce que

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}=Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$$

et

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}\subset Z(\hat{M})^{\Gamma_F}\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0}\subset Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}},$$

on voit que l'homomorphisme naturel

$$(Z(\hat{M})^{\Gamma_F}\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})/(Z(\hat{G})^{\Gamma_F}\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})\to Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$$

est un isomorphisme. D'autre part, on a un homomorphisme naturel

$$(Z(\hat{M})^{\Gamma_F}\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})/(Z(\hat{G})^{\Gamma_F}\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})\to Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F}.$$

On peut donc l'interpréter comme un homomorphisme

$$(1)\qquad Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}\to Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F}.$$

Le groupe d'arrivée n'est autre que $Z(\hat{M}'_{ad})^{\Gamma_F}$, où $\hat{M}'_{ad}$ est 'image de $\hat{M}'$ dans $\hat{G}'(\tilde{s})_{AD}$. Donc ce groupe est connexe et l'homomorphisme (1) est surjectif. On a

(2) $i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))$ est l'inverse du nombre d'éléments du noyau de (1).

Preuve. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & A & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \rightarrow & Z(\hat{G})^{\Gamma_F} \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0} & \rightarrow & Z(\hat{M})^{\Gamma_F} \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0} & \rightarrow & Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} & \rightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \rightarrow & Z(\hat{G}'(\tilde{s})^{\Gamma_F} & \rightarrow & Z(\hat{M}')^{\Gamma_F} & \rightarrow & Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F} & \rightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & B & & C & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 1 & & 1 & & & &
\end{array}$$

Les groupes A, B, C sont définis de sorte que les colonnes soient exactes. Par un raisonnement d'algèbre élémentaire, on en déduit une suite exacte

$$1 \to A \to B \to C \to 1$$

On a $Z(\hat{M})^{\Gamma_F} \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0} = Z(\hat{M}) \cap Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}$ et $Z(\hat{G})^{\Gamma_F} \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0} = Z(\hat{G}) \cap Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F}$. Donc

$$i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s})) = |B|^{-1}|C| = |A|^{-1}.$$

Mais A est le noyau de (1). $\square$

Variante. Supposons $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure (auquel cas on note simplement $\zeta = \tilde{\zeta}$). Fixons un système de fonctions B comme en 1.9. Comme en 1.10, pour tout $s \in \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$, ce système de fonctions en détermine un sur $\tilde{G}'(s)(F)$, que l'on note encore B. Pour $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))^*$ et $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$, on pose

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}) = \sum_{s \in \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) S_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}).$$

Variante. Supposons $G = \tilde{G}$ et $\mathbf{a} = 1$. Fixons une fonction B comme en 1.8. Comme dans la variante précédente, pour tout $s \in \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$, cette fonction se restreint en une fonction pour $G'(s)(F)$, a fortiori comme un système de fonctions comme en 1.9 (pour tout $\epsilon \in G'(s)_{ss}(F)$, B_ϵ est la restriction de B au système de racines de $G'(s)_\epsilon$). Pour $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{unip}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))^*$ et $\mathbf{f} \in C_c^\infty(G(F)) \otimes Mes(G(F))$, on pose

$$I_M^{G,\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}) = \sum_{s \in \zeta Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}} i_{M'}(G, G'(s)) S_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}).$$

1.13 Action d'un groupe d'automorphismes

Les données sont les mêmes que dans le paragraphe précédent. On a introduit en [I] 3.2 le groupe d'automorphismes $Aut(\tilde{M}, \mathbf{M}')$. Il agit sur $D^{st}_{géom}(\mathbf{M}')$ ou $D^{st}_{géom}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))^*$. On note cette action $(x, \boldsymbol{\delta}) \mapsto x(\boldsymbol{\delta})$.

Lemme. *Soient* $x \in Aut(\tilde{M}, \mathbf{M}')$ *et* $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))^*$. *Pour tout* $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F))$, *on a l'égalité*

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', x(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f}) = I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}).$$

Preuve. On réalise ${}^LM$ comme espace de Levi standard de ${}^LG$. D'après la définition de [I] 3.2, x est un élément de $\hat{G}$ tel que $ad_x(\hat{M}) = \hat{M}$, $ad_x(\mathcal{M}') = \mathcal{M}'$ et $ad_x(\tilde{\zeta}) \in Z(\hat{M})\tilde{\zeta}$. Montrons que

(1) $ad_x(\tilde{\zeta}) \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}\tilde{\zeta}$.

Rappelons que $\tilde{\zeta}m' = a(w)m'w(\tilde{\zeta})$ pour tout $(m', w) \in \mathcal{M}'$, où a est à valeurs dans $Z(\hat{G})$. Ecrivons $ad_x(\tilde{\zeta}) = z\tilde{\zeta}$, avec $z \in Z(\hat{M})$. Pour $(m', w) \in \mathcal{M}'$, posons $m'' = x^{-1}m'w(x)$. Alors $(m'', w) \in \mathcal{M}'$, donc $\tilde{\zeta}m'' = a(w)m''w(\tilde{\zeta})$, c'est-à-dire

$$\tilde{\zeta}x^{-1}m'w(x) = a(w)x^{-1}m'w(x)w(\tilde{\zeta}).$$

Cela équivaut à $ad_x(\tilde{\zeta})m' = a(w)m'w(ad_x(\tilde{\zeta}))$, ou encore à $z\tilde{\zeta}m' = a(w)m'w(z)w(\tilde{\zeta})$. En comparant avec la première égalité de la preuve, on obtient $w(z) = z$. D'où (1).

D'autre part, x normalise $\hat{M}$ et la classe $x\hat{M}$ est conservée par l'action galoisienne et par $\hat{\theta}$ (parce que ad_x normalise ${}^LM\hat{\theta}$, cf. [I] 3.2). Il en résulte que la restriction de ad_x à $Z(\hat{M})$ conserve aussi ces actions. Alors l'application $\tilde{s} \mapsto x\tilde{s}x^{-1}$ définit une bijection de $\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/(Z(\hat{G})^{\Gamma_F}(1-\hat{\theta})(Z(\hat{M})^{\Gamma_F}))$ sur lui-même. Les données endoscopiques $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ et $\mathbf{G}'(x\tilde{s}x^{-1})$ sont équivalentes, l'équivalence étant définie par x. Cette équivalence échange les systèmes de fonctions $B^{\tilde{G}}$ relatives aux deux groupes, ainsi qu'il résulte de leur définition. L'équivalence définit un isomorphisme de $SI(\mathbf{G}'(\tilde{s}))$ sur $SI(\mathbf{G}'(x\tilde{s}x^{-1}))$. Cet isomorphisme envoie $\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}$ sur $\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(x\tilde{s}x^{-1})}$. Par restriction à $\mathbf{M}'$ puis par dualité, il s'en déduit un automorphisme de $D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}')$ qui n'est autre que celui introduit avant l'énoncé. Il en résulte que

$$S^{\mathbf{G}'(x\tilde{s}x^{-1})}_{\mathbf{M}'}(x\boldsymbol{\delta}, B^{\tilde{G}}, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(x\tilde{s}x^{-1})}) = S^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}, B^{\tilde{G}}, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}).$$

On a aussi évidemment l'égalité $i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(x\tilde{s}x^{-1})) = i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s}))$. L'énoncé résulte alors du simple changement de variables $\tilde{s} \mapsto x\tilde{s}x^{-1}$ dans la définition de $I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', x(\boldsymbol{\delta}), \mathbf{f})$. $\square$

Corollaire. *Soit* $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))^*$. *Supposons que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

(i) la projection de $\boldsymbol{\delta}$ *sur le sous-espace des éléments de* $D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))^*$ *invariants par l'action de* $Aut(\tilde{M}, \mathbf{M}')$ *est nulle ;*

(ii) le support de $\boldsymbol{\delta}$ *ne coupe pas l'ensemble des* $\delta \in \tilde{M}'(F)$ *tels que* $N^{\tilde{M}',\tilde{M}}(\delta) \in N^{\tilde{M}}(\tilde{M}_{ab}(F))$.

Alors on a l'égalité $I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = 0$ *pour tout* $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$.

Preuve. D'après le lemme, on peut remplacer $\boldsymbol{\delta}$ par sa projection sur le sous-espace des éléments de $D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))^*$ invariants par l'action de $Aut(\tilde{M}, \mathbf{M}')$. La conclusion s'ensuit sous l'hypothèse (i). Par ailleurs, grâce à [I] lemme 2.6, on voit que (ii) entraîne (i). $\square$

Variante. Supposons $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Fixons un système de fonctions B comme en 1.9. Les résultats ci-dessus valent aussi pour les distributions $I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f})$.

Variante. Supposons $G = \tilde{G}$ et $\mathbf{a} = 1$. Fixons une fonction B comme en 1.8. Les résultats ci-dessus valent aussi pour les distributions $I_M^{G,\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f})$.

1.14 Formules de descente

Les données sont les mêmes qu'en 1.12. On va considérer trois situations dans lesquelles on a des formules de descente pour les distributions introduites en 1.10 et 1.12.

(a) Soit R' un groupe de Levi de M' qui est relevant. Modulo certains choix, on construit comme en [I] 3.4 un sous-espace de Levi $\tilde{R}$ de $\tilde{M}$ et une donnée endoscopique elliptique et relevante $\mathbf{R}'$ de $\tilde{R}$. On dispose d'un homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} I(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F)) & \to & I(\mathbf{R}') \otimes Mes(R'(F)) \\ \boldsymbol{\varphi} & \mapsto & \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{R}'} \end{array}$$

et d'un homomorphisme dual

$$\begin{array}{ccc} D_{g\acute{e}om}(\mathbf{R}') \otimes Mes(R'(F))^* & \to & D_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))^* \\ \boldsymbol{\delta} & \mapsto & \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'} \end{array}$$

qui préserve la stabilité.

(b) On suppose que $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure et on fixe un système de fonctions B comme en 1.9. Soit R un groupe de Levi de M. On a les mêmes homomorphismes que ci-dessus pour $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$ et $\mathbf{R}' = \mathbf{R}$. On réalise $\hat{R}$ et $\hat{M}$ comme des groupes de Levi standard de $\hat{G}$. Posons dans ce cas la définition suivante. Soit $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{R})$. Il lui correspond un élément $\hat{L} \in \mathcal{L}(\hat{R})$. Alors

$$e_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}) = \begin{cases} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L})[(Z(\hat{M})^{\Gamma_F} \cap Z(\hat{L})^{\Gamma_F}) : Z(\hat{G})^{\Gamma_F}]^{-1}, & \text{si } \mathcal{A}_M^G \oplus \mathcal{A}_L^G = \mathcal{A}_R^G, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que l'hypothèse $\mathcal{A}_M^G \oplus \mathcal{A}_L^G = \mathcal{A}_R^G$ entraîne que le quotient $(Z(\hat{M})^{\Gamma_F} \cap Z(\hat{L})^{\Gamma_F})/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$ est fini. Remarquons aussi que le terme $[(Z(\hat{M})^{\Gamma_F} \cap Z(\hat{L})^{\Gamma_F}) : Z(\hat{G})^{\Gamma_F}]^{-1}$ peut s'interpréter comme l'inverse du nombre d'éléments du noyau de l'homomorphisme naturel

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F} \to Z(\hat{R})^{\Gamma_F}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F}.$$

(c) Soit R' un groupe de Levi de M' qui n'est pas relevant. L'espace $D_{g\acute{e}om}(\mathbf{R}')$ n'est pas défini. Néanmoins, fixons des données supplémentaires $M_1', ..., \Delta_1$ pour $\mathbf{M}'$. On a alors un homomorphisme d'induction

$$\begin{array}{ccc} D_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\tilde{R}_1'(F)) \otimes Mes(R'(F))^* & \to & D_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\tilde{M}_1'(F)) \otimes Mes(M'(F))^* \\ & & \| \\ & & D_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))^* \\ \boldsymbol{\delta} & \mapsto & \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'} \end{array}$$

Proposition. *(i) Dans la situation (a), soient* $\boldsymbol{\delta} \in D_{g\acute{e}om}^{st}(\mathbf{R}') \otimes Mes(R'(F))^*$ *et* $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F))$. *On a l'égalité*

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'}, \mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{R})} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}) I_{\tilde{R}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{R}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}_{\tilde{L},\omega}).$$

(ii) Dans la situation (b), soient $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\mathbf{R}) \otimes Mes(R(F))^*$ *et* $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$*. On a l'égalité*

$$S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}^M, B, \mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})} e^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M}, \tilde{L}) S^{\tilde{L}}_{\tilde{R}}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f}_{\tilde{L}}).$$

(iii) Dans la situation (c), soient $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom,\lambda_1}(\tilde{R}'_1(F))\otimes Mes(R'(F))^*$ *et* $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F), \omega)\otimes Mes(G(F))$*. On a l'égalité* $I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'}, \mathbf{f}) = 0$.

Preuve. On choisit une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B}, \hat{T}, (\hat{E}_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de $\hat{G}$ comme en [I] 1.5. Si $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure et si $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$, la formule (i) n'est autre que celle du lemme 1.7. On exclut ce cas. On peut supposer que $\hat{R} \subset \hat{M}$ sont des Levi standard de $\hat{M}$. On écrit $\mathbf{R}' = (R', \mathcal{R}', \tilde{\zeta})$. On peut supposer que $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$, avec $\mathcal{M}' = \hat{M}'\mathcal{R}'$, cf. [I] 3.4. Rappelons la définition

$$(1) \qquad I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'}, \mathbf{f}) = \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s})) S^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'}, B^{\tilde{G}}, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}).$$

Pour chaque $\tilde{s}$, on fixe des données auxiliaires $G'(\tilde{s})_1, ..., \Delta(\tilde{s})_1$. On note $\lambda(\tilde{s})_1$ le caractère associé de $C(\tilde{s})_1(F)$ et $\tilde{M}'(\tilde{s})_1$ l'image réciproque de $\tilde{M}'$ dans $\tilde{G}'(\tilde{s})_1$. On peut remplacer $S^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'}, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})$ par $S^{\tilde{G}'(\tilde{s})_1}_{\tilde{M}'(\tilde{s})_1,\lambda(\tilde{s})_1}(\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_1^{M'(\tilde{s})_1}, \mathbf{f}^{\tilde{G}'(\tilde{s})_1})$. L'assertion (ii) se généralise au cas où les fonctions et distributions se transforment selon un caractère d'un tore central. La preuve est formelle. On applique cette assertion par récurrence à chacun des termes du second membre. On obtient

$$(2) \qquad I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'}, \mathbf{f}) = \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s}))$$

$$\sum_{\tilde{L}'_{\tilde{s}}\in\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{R}')} e^{\tilde{G}'(\tilde{s})_1}_{\tilde{R}'(\tilde{s})_1}(\tilde{M}'(\tilde{s})_1, \tilde{L}'_{\tilde{s},1}) S^{\tilde{L}'_{\tilde{s},1}}_{\tilde{R}'(\tilde{s})_1,\lambda(\tilde{s})_1}(\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_1, B^{\tilde{G}}, (\mathbf{f}^{\tilde{G}'(\tilde{s})_1})_{\tilde{L}'_{\tilde{s},1}})$$

($\tilde{L}'_{\tilde{s},1}$ est l'image réciproque de $\tilde{L}'_{\tilde{s}}$ dans $\tilde{G}'(\tilde{s})_1$). Rappelons que l'on peut identifier $\mathcal{L}(\tilde{R})$ à un sous-ensemble de $\mathcal{L}(\hat{R})$ et de même, pour tout $\tilde{s}$, $\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{R}')$ à un sous-ensemble de $\mathcal{L}^{\hat{G}'(\tilde{s})}(\hat{R}')$. Soient $\tilde{s} \in \tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ et $\tilde{L}'_{\tilde{s}} \in \mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{R}')$. L'espace $\mathcal{A}_{L'}$ est inclus dans $\mathcal{A}_{R'}$ qui s'identifie à $\mathcal{A}_{\tilde{R}}$ puisque $\mathbf{R}'$ est une donnée elliptique de $(R, \tilde{R}, \mathbf{a})$. Un raisonnement standard montre qu'il existe un unique $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{R})$ de sorte que $\mathcal{A}_{L'}$ s'identifie à $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$. Alors $\hat{L}'_{\tilde{s}}$ est égal à l'intersection de $\hat{G}'(\tilde{s})$ avec $\hat{L}$ et aussi à la composante neutre du commutant de $\tilde{s}$ dans $\hat{M}$. On introduit le groupe $\mathcal{L}'(\tilde{s}) = \hat{L}'_{\tilde{s}}\mathcal{R}'$. Alors $(L'_{\tilde{s}}, \mathcal{L}'(\tilde{s}), \tilde{s})$ n'est autre que la donnée endoscopique $\mathbf{L}'(\tilde{s})$ de $(L, \tilde{L}, \mathbf{a})$. Cette donnée est elliptique par construction et est relevante puisqu'elle "contient" $\mathbf{R}'$ qui l'est par hypothèse. Les données $L'_{\tilde{s},1}, ...$ obtenues par restriction de celles fixées pour $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ sont des données auxiliaires pour $\mathbf{L}'(\tilde{s})$. Enfin on a l'égalité $(\mathbf{f}^{\tilde{G}'(\tilde{s})_1})_{\tilde{L}'_{\tilde{s},1}} = (\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})^{\tilde{L}'_{\tilde{s},1}}$. Tout cela montre que l'on a

$$S^{\tilde{L}'_{\tilde{s},1}}_{\tilde{R}'(\tilde{s})_1,\lambda(\tilde{s})_1}(\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_1, B^{\tilde{G}}, (\mathbf{f}^{\tilde{G}'(\tilde{s})_1})_{\tilde{L}'_{\tilde{s},1}}) = S^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}_{\mathbf{R}'}(\boldsymbol{\delta}, B^{\tilde{G}}, (\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}).$$

Il est clair que $d^{\tilde{G}'(\tilde{s})_1}_{\tilde{R}'(\tilde{s})_1}(\tilde{M}'(\tilde{s})_1, \tilde{L}'_{\tilde{s},1}) = d^{\tilde{G}'(\tilde{s})}_{\tilde{R}'}(\tilde{M}', \tilde{L}'(\tilde{s}))$ (par exemple, $\mathcal{A}^{G'(\tilde{s})_1}_{R'(\tilde{s})_1} = \mathcal{A}^{G'(\tilde{s})}_{R'}$). On vérifie que l'homomorphisme naturel

$$(Z(\hat{M}')^{\Gamma_F} \cap Z(\hat{L}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F})/Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F} \to (Z(\hat{M}'(\tilde{s})_1)^{\Gamma_F} \cap Z(\hat{L}'_{\tilde{s},1})^{\Gamma_F})/Z(\hat{G}'(\tilde{s})_1)^{\Gamma_F}$$

est bijectif (cf. la preuve de la relation (6) de 1.10). On en déduit que $e_{\tilde{R}'(\tilde{s})_1}^{\tilde{G}'(\tilde{s})_1}(\tilde{M}'(\tilde{s})_1, \tilde{L}'_{\tilde{s},1}) = e_{\tilde{R}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}', \tilde{L}'(\tilde{s}))$.

On est parti d'un couple $(\tilde{s}, \tilde{L}'_{\tilde{s}})$ et on lui a associé $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{R})$. A fortiori, on peut lui associer le couple $(\tilde{s}, \tilde{L})$. On voit que l'on obtient une bijection de notre ensemble de couples $(\tilde{s}, \tilde{L}'_{\tilde{s}})$ sur celui des couples $(\tilde{s}, \tilde{L})$ pour lequel la donnée endoscopique $\mathbf{L}'(\tilde{s})$ est elliptique.

Utilisons les relations ci-dessus et regroupons les $\tilde{L}'_{\tilde{s}}$ qui interviennent dans la formule (2) selon l'espace de Levi $\tilde{L}$ que l'on vient de leur associer. On obtient

$$(3) \qquad I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'}, \mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})} \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}};\mathbf{L}'(\tilde{s}) \text{ elliptique}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s}))$$

$$e_{\tilde{R}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}', \tilde{L}'(\tilde{s}))S_{\mathbf{R}'}^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}, B^{\tilde{G}}, (\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}).$$

Fixons $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{R})$.Pour chaque espace $\tilde{L}'(\tilde{s})$ apparaissant ci-dessus, les systèmes de fonctions $B^{\tilde{G}}$ et $B^{\tilde{L}}$ sont les mêmes, ce qui nous autorise à remplacer le premier par le second. Un élément $\tilde{s} \in \tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ n'intervient effectivement dans la formule ci-dessus que si $\mathbf{L}'(\tilde{s})$ est elliptique, $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ l'est aussi (d'après la définition de $i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s}))$) et $\mathcal{A}_{R'}^{G'(\tilde{s})} = \mathcal{A}_{R'}^{M'} \oplus \mathcal{A}_{R'}^{L'(\tilde{s})}$ (d'après la définition de $e_{\tilde{R}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}', \tilde{L}'(\tilde{s}))$). Les deux premières conditions plus les hypothèses que $\mathbf{M}'$ et $\mathbf{R}'$ sont elliptiques entraînent les égalités $\mathcal{A}_{R'}^{G'(\tilde{s})} = \mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}$, $\mathcal{A}_{R'}^{M'} = \mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}$, $\mathcal{A}_{R'}^{L'(\tilde{s})} = \mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}$. L'égalité précédente devient $\mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{G}} = \mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{M}} \oplus \mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}$. Plus précisément les rapports de mesures sont les mêmes, c'est-à-dire que $d_{\tilde{R}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}', \tilde{L}'(\tilde{s})) = d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L})$. Inversement, si ce dernier nombre n'est pas nul et si $\mathbf{L}'(\tilde{s})$ est elliptique, $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ l'est aussi. En effet, l'espace $\mathcal{A}_{R'}^{G'(\tilde{s})}$ contient $\mathcal{A}_{R'}^{M'}$ et $\mathcal{A}_{R'}^{L'(\tilde{s})}$ puisque M' et $L'(\tilde{s})$ sont des Levi de $G'(\tilde{s})$. Il contient donc leur somme, laquelle est $\mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}$, ce qui assure l'ellipticité.

On suppose désormais $d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}) \neq 0$. En se rappelant la définition des différents coefficients, on peut donc récrire la sous-somme de (3) indexée par $\tilde{L}$ sous la forme

$$(4) \qquad d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}) \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}};\mathbf{L}'(\tilde{s}) \text{ elliptique}} X(\tilde{s})S_{\mathbf{R}'}^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}, B^{\tilde{L}}, (\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}),$$

où

$$X(\tilde{s}) = i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s}))[(Z(\hat{M}')^{\Gamma_F} \cap Z(\hat{L}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F}) : Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F}]^{-1}.$$

Les deux facteurs composant $X(\tilde{s})$ sont les inverses des nombres d'éléments des noyaux des homomorphismes

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \to Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F}$$

et

$$Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F} \to Z(\hat{R}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{L}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F}.$$

Ces deux homomorphismes étant surjectifs, $X(\tilde{s})$ est l'inverse du nombre d'éléments du noyau de l'homomorphisme composé

$$p_1(\tilde{s}) : Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \to Z(\hat{R}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{L}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F}.$$

La donnée $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ a maintenant disparu et tous les termes ne dépendent que de la classe $\tilde{s}Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. Rappelons que l'hypothèse $\mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{G}} = \mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{M}} \oplus \mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}$ entraîne dualement que l'homomorphisme

$$(Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0} \times Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0})/diag_-(Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}) \to Z(\hat{R})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$$

est surjectif de noyau fini ($diag_-$ est le plongement antidiagonal). Rappelons aussi que

$$Z(\hat{R})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} = Z(\hat{R})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}.$$

On en déduit que l'homomorphisme naturel.

$$p_2 : Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \to Z(\hat{R})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$$

est aussi surjectif de noyau fini. On peut récrire la formule (4) en sommant sur l'espace d'arrivée de cet homomorphisme plutôt que sur son espace de départ. On obtient

$$(5) \qquad d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}) \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{R})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta}};\mathbf{L}'(\tilde{s}) \text{ elliptique}} |Ker(p_2)|X(\tilde{s})S_{\mathbf{R}'}^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}, B^{\tilde{L}}, (\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}).$$

On a l'égalité

$$(6) \qquad |Ker(p_2)|X(\tilde{s}) = i_{\tilde{R}'}(\tilde{L},\tilde{L}'(\tilde{s})).$$

En effet, l'homomorphisme $p_1(\tilde{s})$ se factorise en

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \stackrel{p_2}{\to} Z(\hat{R})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \to Z(\hat{R}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{L}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F}.$$

Ces deux homomorphismes étant surjectifs et $X(\tilde{s})$ étant l'inverse du nombre d'éléments de leur composé, le produit $|Ker(p_2)|X(\tilde{s})$ est l'inverse du nombre d'éléments du noyau du second homomorphisme. C'est $i_{\tilde{R}'}(\tilde{L},\tilde{L}'(\tilde{s}))$ par définition de ce terme.

Remplaçons $|Ker(p_2)|X(\tilde{s})$ par $i_{\tilde{R}'}(\tilde{L},\tilde{L}'(\tilde{s}))$ dans la formule (5). Cela nous permet de supprimer la condition $\mathbf{L}'(\tilde{s})$ elliptique puisque ce terme est nul si cette condition n'est pas vérifiée. Alors (5) coïncide avec le produit de $d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L})$ avec la formule qui définit $I_{\tilde{R}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{R}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})$. Reportons ensuite (5) dans l'égalité (3). On obtient

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'},\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L})I_{\tilde{R}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{R}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega}).$$

C'est l'égalité du (i) de l'énoncé.

La preuve de (ii) est similaire, à ceci près que l'on raisonne par récurrence. On part de l'égalité analogue à (1)

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}^M,B,\mathbf{f}) = S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}^M,B,\mathbf{f}) + \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}^M,B,\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}).$$

Pour le terme associé à $s \neq 1$, on peut appliquer par récurrence la relation (ii) au terme indexé par s. Pour le premier terme du membre de droite, on l'applique aussi mais, puisqu'on ne sait pas encore qu'elle est vraie, on doit ajouter la différence X entre le membre de gauche et celui de droite de l'égalité du (ii). Le calcul se poursuit (c'en est un cas particulier) et on obtient finalement

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}^M,B,\mathbf{f}) = X + \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L})I_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta},B,\mathbf{f}_{\tilde{L}}).$$

Il reste à appliquer le lemme 1.7 (dont on a dit qu'il se généralisait aux distributions relatives au système de fonctions B) pour conclure $X=0$, ce que l'on voulait prouver.

La preuve de (iii) est plus délicate. Montrons d'abord que l'on peut imposer des hypothèses supplémentaires aux données R' et $\boldsymbol{\delta}$. Du côté des groupes duaux, la situation est la même que dans le cas (i). On peut définir $\hat{R}$ comme la composante neutre du commutant de $Z(\hat{R}')^{\Gamma_F,0}$ dans $\hat{G}$. On a déjà supposé $\hat{M}$ standard et, par un procédé analogue, on peut supposer que $\hat{R}$ est lui-aussi standard. Les deux Levi $\hat{M}$ et $\hat{R}$ sont invariants par Γ_F et par $\hat{\theta}$. On pose $\mathcal{R}'=\mathcal{M}'\cap(\hat{R}\rtimes W_F)$. On a encore $\mathcal{M}'=\hat{M}'\mathcal{R}'$. Deux cas sont possibles. Le premier est

(7) $\hat{R}$ ne correspond à aucun Levi de G.

Supposons au contraire que $\hat{R}$ corresponde à un Levi R de G. Dans ce cas, R s'étend naturellement en un espace de Levi $\tilde{R}$ de $\tilde{G}$ et $(R',\mathcal{R}',\tilde{\zeta})$ est une donnée endoscopique de $(R,\tilde{R},\mathbf{a})$. Alors l'hypothèse que R' n'est pas relevant signifie que cette donnée endoscopique n'est pas relevante. On dispose des applications

$$\begin{array}{ccc} \tilde{R}(F) & & \\ & \searrow N^{\tilde{R}} & \\ & & \tilde{R}_{0,ab}(F)\ . \\ & \nearrow N^{\tilde{R}',\tilde{R}} & \\ \tilde{R}'(F) & & \end{array}$$

Notons $\tilde{R}'(F)^{in}$, resp. $\tilde{R}'(F)^{out}$, l'ensemble des $\gamma\in\tilde{R}'(F)$ tels que $N^{\tilde{R}',\tilde{R}}(\gamma)$ appartient à l'image de $N^{\tilde{R}}$, resp. n'appartient pas à cette image. L'ensemble $\tilde{R}'(F)$ est union disjointe de $\tilde{R}'(F)^{in}$ et $\tilde{R}'(F)^{out}$. Ces deux ensembles sont ouverts, fermés et invariants par conjugaison stable. Parce que R' n'est pas relevant, $\tilde{R}'(F)^{in}$ ne contient aucun élément elliptique et fortement $\tilde{R}$-régulier ([I] proposition 1.14). Par linéarite, on peut supposer que le support de $\boldsymbol{\delta}$ est formé d'éléments dont la partie semi-simple appartient à une classe de conjugaison stable fixée. Supposons que cette classe soit contenue dans $\tilde{R}'(F)^{in}$. Fixons ϵ dans cette classe. Parce que ϵ n'appartient pas à un sous-tore tordu elliptique de $\tilde{R}$, l'inclusion $A_{R'}\subset A_{R'_\epsilon}$ est stricte. On introduit le Levi S' de R' tel que $A_{S'}=A_{R'_\epsilon}$. C'est un Levi propre. D'après [I] lemme 5.12, il existe un élément $\boldsymbol{\sigma}\in D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\tilde{S}'_1(F))\otimes Mes(S'(F))^*$ tels que $\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\sigma}^{R'}$. Evidemment, le Levi S' est encore moins relevant que R'. En raisonnant par récurrence sur la dimension de R', on peut supposer $I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{M}'},\mathbf{f})=0$. Mais $I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'},\mathbf{f})=I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{M}'},\mathbf{f})$ et la conclusion cherchée s'ensuit. On est donc ramené au cas

(8) $\hat{R}$ correspond à un espace de Levi $\tilde{R}$ de $\tilde{G}$ et le support de $\boldsymbol{\delta}$ est contenu dans l'ensemble $\tilde{R}'(F)^{out}$ ci-dessus.

Partons de la formule (1) et introduisons pour chaque $\tilde{s}$ des données auxiliaires $G'(\tilde{s})_1,\dots,\Delta(\tilde{s})_1$. On dispose de l'isomorphisme de transition

$$C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{M}'_1(F))\to C^\infty_{c,\lambda(\tilde{s})_1}(\tilde{M}'(s)_1),$$

qui se restreint en un isomorphisme

$$C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{R}'_1(F))\to C^\infty_{c,\lambda(\tilde{s})_1}(\tilde{R}'(s)_1(F)).$$

Par dualité, on a aussi un isomorphisme

$$D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\tilde{R}'_1(F))\to D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda(\tilde{s})_1}(\tilde{R}'(s)_1(F)).$$

Par cet isomorphisme, $\boldsymbol{\delta}$ s'identifie à un élément $\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_1$ de l'espace d'arrivée. Alors $\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'}$ s'identifie à $(\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_1)^{M'(\tilde{s})_1}$. Avec cette définition, la formule (2) reste valable. Soient $\tilde{s}$ et $\tilde{L}'_{\tilde{s}}$ intervenant dans cette formule. La définition de $\tilde{L}$ n'a plus de sens puisque $\tilde{R}$ n'existe plus. Mais on peut définir $\hat{L} \in \mathcal{L}(\hat{R})$ comme le commutant de $Z(\hat{L}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F,0}$ dans $\hat{G}$. C'est un Levi de $\hat{G}$ et il existe un sous-groupe parabolique $\hat{Q} \in \mathcal{P}(\hat{L})$ qui est invariant par Γ_F et $\hat{\theta}$. Si G était quasi-déployé, il correspondrait à $\hat{L}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. Mais G n'est pas supposé quasi-déployé. On construit comme précédemment le triplet $\mathbf{L}'(\tilde{s}) = (L'(\tilde{s}) = L'_{\tilde{s}}, \mathcal{L}'(\tilde{s}), \tilde{s})$. Il est elliptique pour $\hat{L}$ au sens où $Z(\hat{L}'_{\tilde{s}})^{\Gamma_F,0} = Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$. On regroupe les termes de (2) selon le Levi $\hat{L}$ et on obtient une formule parallèle à (3) :

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'}, \mathbf{f}) = \sum_{\hat{L}} \sum_{\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}; \mathbf{L}'(\tilde{s}) \text{ elliptique}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s}))$$

$$e_{\tilde{R}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}', \tilde{L}'(\tilde{s})) S_{\tilde{R}'(\tilde{s})_1,\lambda(\tilde{s})_1}^{\tilde{L}'(\tilde{s})_1}(\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_1, B^{\tilde{G}}, (\mathbf{f}^{\tilde{G}'(\tilde{s})_1})_{\tilde{L}'(\tilde{s})_1}).$$

Ici $\hat{L}$ parcourt l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}(\hat{R})$ qui vérifient la condition ci-dessus : il existe $\hat{Q} \in \mathcal{P}(\hat{L})$ qui est invariant par Γ_F et $\hat{\theta}$. Fixons $\hat{L}$. On va montrer que la sous-somme indexée par $\hat{L}$ dans l'expression ci-dessus est nulle. Si elle est non nulle, il y a un $\tilde{s}$ pour lequel $(\mathbf{f}^{\tilde{G}'(\tilde{s})_1})_{\tilde{L}'(\tilde{s})_1}$ est non nulle. Cela entraîne que $L'(\tilde{s})$ est relevant. A fortiori, $\hat{L}$ correspond à un espace de Levi de $\tilde{G}$, ou plus exactement à une classe de conjugaison de tels Levi. On peut donc fixer un espace de Levi $\tilde{L}$ de $\tilde{G}$ et supposer que $\hat{L}$ est le groupe dual de L. Alors $\mathbf{L}'(\tilde{s})$ est une donnée endoscopique elliptique de $(L, \tilde{L}, \mathbf{a})$ et on a l'égalité $(\mathbf{f}^{\tilde{G}'(\tilde{s})_1})_{\tilde{L}'(\tilde{s})_1} = (\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})^{\tilde{L}'(\tilde{s})_1}$. On peut aussi imposer que pour un $\tilde{s}$, le produit des coefficients soit non nul. Cela impose que l'homomorphisme

$$(Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0} \times Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0})/diag_-(Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}) \to Z(\hat{R}')^{\Gamma_F,0}$$

est surjectif et de noyau fini. La condition d'ellipticité imposée à $\mathbf{L}'(\tilde{s})$ entraîne que l'espace $\mathcal{A}_{R'}^{L'(\tilde{s})}$ ne dépend pas de $\tilde{s}$. Le coefficient $d_{\tilde{R}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}', \tilde{L}'(\tilde{s}))$ n'en dépend pas non plus. En notant d sa valeur constante, on obtient une formule parallèle à (4)

$$\sum_{\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}; \mathbf{L}'(\tilde{s}) \text{ elliptique}} dX(\tilde{s}) S_{\tilde{R}'(\tilde{s})_1,\lambda(\tilde{s})_1}^{\tilde{L}'(\tilde{s})_1}(\boldsymbol{\delta}(\tilde{s})_1, B^{\tilde{L}}, (\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})^{\tilde{L}'(\tilde{s})_1}),$$

où $X(\tilde{s})$ est comme précédemment. Introduisons le groupe $Z(\hat{R})_*$ image réciproque dans $Z(\hat{R})$ de $(Z(\hat{R})/(Z(\hat{R}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0}))^{\Gamma_F}$. L'ensemble

$$(Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \cap (Z(\hat{L})^{\Gamma_F}(1-\hat{\theta})(Z(\hat{R})_*)))/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$$

est un sous-groupe fini de $Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. Il nous suffit de trouver un sous-groupe $\mathcal{Z}$ de ce groupe tel que, pour tout $\tilde{s}_0 \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ la sous-somme sur $\tilde{s} \in \mathcal{Z}\tilde{s}_0$ de l'expression ci-dessus soit nulle. Fixons-donc un tel sous-groupe $\mathcal{Z}$ que nous préciserons plus tard. Pour prouver la nullité ci-dessus, on ne perd pas grand'chose à supposer que $\tilde{s}_0 = \tilde{\zeta}$, ce que nous ferons pour simplifier. On a

(9) pour $\tilde{s} \in \mathcal{Z}\tilde{\zeta}$, les données endoscopiques $\mathbf{L}'(\tilde{s})$ et $\mathbf{L}'(\tilde{\zeta})$ sont équivalentes ; si ces données sont elliptiques, on a $X(\tilde{s}) = X(\tilde{\zeta})$.

Preuve. Soit $z \in \mathcal{Z}$ (ou plus exactement un représentant dans $\hat{G}$, les éléments de $\mathcal{Z}$ étant des classes modulo $Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$). Ecrivons $z = \tau(1-\hat{\theta})(\rho)$, avec $\tau \in Z(\hat{L})^{\Gamma_F}$

et $\rho \in Z(\hat{R})_*$. L'automorphisme ad_ρ conserve $\hat{L}$ puisque $\rho \in \hat{R} \subset \hat{L}$. On a l'égalité $\tilde{z\zeta} = \rho\tau\tilde{\zeta}\rho^{-1}$. Donc ad_ρ envoie $\hat{L}'(\tilde{\tau\zeta})$ sur $\hat{L}'(\tilde{z\zeta})$. Puisque $\tau \in Z(\hat{L})$, on a $\hat{L}'(\tilde{\tau\zeta}) = \hat{L}'(\tilde{\zeta})$ donc ad_ρ envoie $\hat{L}'(\tilde{\zeta})$ sur $\hat{L}'(\tilde{z\zeta})$. Puisque $\rho \in Z(\hat{R})_*$, ad_ρ conserve $\mathcal{R}'$. Donc ad_ρ envoie $\mathcal{L}'(\tilde{\zeta})$ sur $\mathcal{L}'(\tilde{z\zeta})$. Autrement dit ρ définit une équivalence entre les données $\mathbf{L}'(\tilde{\zeta})$ et $\mathbf{L}'(\tilde{z\zeta})$.

Les calculs conduisant à l'égalité (6) restent valables : ils se placent entièrement dans les groupes duaux et dans ces groupes, la situation n'a pas changé. Cette égalité montre que $X(\tilde{s})$ ne dépend que de la classe d'équivalence de la donnée $\mathbf{L}'(\tilde{s})$. D'où l'assertion (9).

Si $\mathbf{L}'(\tilde{\zeta})$ n'est pas elliptique, la sous-somme sur $\tilde{s} \in \mathcal{Z}\tilde{\zeta}$ est nulle. De même, si $\mathbf{L}'(\tilde{\zeta})$ n'est pas relevant, les fonctions $(\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})^{\tilde{L}'(\tilde{s})_1}$ sont nulles. Supposons $\mathbf{L}'(\tilde{\zeta})$ elliptique et relevant. Grâce à (9), l'assertion à prouver se réduit à

$$(10) \qquad \sum_{z\in\mathcal{Z}} S^{\tilde{L}'(\tilde{z\zeta})_1}_{\tilde{R}'(\tilde{z\zeta})_1,\lambda(\tilde{z\zeta})_1}(\boldsymbol{\delta}(\tilde{z\zeta})_1, B^{\tilde{L}}, (\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})^{\tilde{L}'(\tilde{z\zeta})_1}) = 0.$$

Fixons $z \in \mathcal{Z}$. On va calculer $S^{\tilde{L}'(\tilde{z\zeta})_1}_{\tilde{R}'(\tilde{z\zeta})_1,\lambda(\tilde{z\zeta}_1}(\boldsymbol{\delta}(\tilde{z\zeta})_1, B^{\tilde{L}}, (\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})^{\tilde{L}'(\tilde{z\zeta})_1})$. Pour cela, on a besoin de fixer une décomposition $z = \tau(1-\hat{\theta})(\rho)$ comme dans la preuve de (9). On a deux données auxiliaires pour $\mathbf{M}'$: les données $M'(\tilde{\zeta})_1,...$ et les données $M'(\tilde{z\zeta})_1,...$ D'où une fonction de recollement $\tilde{\lambda}(z)^M$ définie sur le produit fibré de $\tilde{M}'(\tilde{\zeta})_1(F)$ et $\tilde{M}'(\tilde{z\zeta})_1(F)$ au-dessus de $\tilde{M}'(F)$. On note un tel produit fibré $\tilde{M}'(\tilde{\zeta})_1(F) \times_{\tilde{M}'(F)} \tilde{M}'(\tilde{z\zeta})_1(F)$. Par restriction, cette fonction définit un isomorphisme

$$\iota(z)^M : C^\infty_{c,\lambda(\tilde{\zeta})_1}(\tilde{R}'(\tilde{\zeta})_1(F)) \simeq C^\infty_{c,\lambda(\tilde{z\zeta})_1}(\tilde{R}'(\tilde{z\zeta})_1(F)).$$

On en déduit un isomorphisme dual

$$\iota(z)^{M,*} : D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda(\tilde{z\zeta})_1}(\tilde{R}'(\tilde{z\zeta})_1(F)) \simeq D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda(\tilde{\zeta})_1}(\tilde{R}'(\tilde{\zeta})_1(F)).$$

Par construction, on a $\boldsymbol{\delta}(\tilde{\zeta})_1 = \iota(z)^{M,*}(\boldsymbol{\delta}(\tilde{z\zeta})_1)$.

L'action galoisienne sur $\hat{L}'(\tilde{\zeta})$ est héritée de celle sur $\hat{G}'(\tilde{\zeta})$. L'intersection de $(\hat{B}, \hat{T})$ avec $\hat{L}'(\tilde{\zeta})$ est une paire de Borel de ce groupe, invariante pour cette action et pour laquelle $\hat{R}'$ est standard. On peut compléter cette paire en une paire de Borel épinglée invariante par Γ_F. On effectue la même construction pour $\hat{L}'(\tilde{z\zeta})$. Il est loisible de supposer que la restriction de l'épinglage de ce groupe à $\hat{R}'$ coïncide avec celle de l'épinglage de $\hat{L}'(\tilde{\zeta})$. Ecrivons $z = \tau(1-\hat{\theta})(\rho)$ comme dans la preuve de (9). L'automorphisme ad_ρ transporte la paire de Borel de $\hat{L}'(\tilde{\zeta})$ sur celle de $\hat{L}'(\tilde{z\zeta})$. Quitte à multiplier ρ par un élément de $Z(\hat{R}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0}$, ce qui ne change pas $(1-\hat{\theta})(\rho)$, on peut supposer que ad_ρ transporte aussi les épinglages. Alors ad_ρ est équivariant pour les actions galoisiennes. On peut identifier les groupes $L'(\tilde{\zeta})$ et $L'(\tilde{z\zeta})$, ainsi que les espaces $\tilde{L}'(\tilde{\zeta})$ et $\tilde{L}'(\tilde{z\zeta})$. Comme en [I] 2.6, les données auxiliaires $L'(\tilde{z\zeta})_1,...$ pour $\mathbf{L}'(\tilde{z\zeta}$ se transportent en des données auxiliaires pour $\mathbf{L}'(\tilde{\zeta})$. C'est-à-dire que, via les isomorphismes précédents, on considère $L'(\tilde{z\zeta})_1$ comme une extension de $L'(\tilde{\zeta})$ et $\tilde{L}'(\tilde{z\zeta})_1$ comme un espace au-dessus de $\tilde{L}'(\tilde{\zeta})$. On complète ces données par le plongement

$$\mathcal{L}'(\tilde{\zeta}) \overset{ad_\rho}{\to} \mathcal{L}'(\tilde{z\zeta}) \overset{\hat{\xi}(\tilde{z\zeta})_1}{\to} {}^L L'(\tilde{z\zeta})_1$$

et par le facteur de transfert $\Delta(\tilde{z\zeta})_1$. Il y a une fonction de recollement $\tilde{\lambda}(z,\rho)^L$ définie sur $\tilde{L}'(\tilde{\zeta})_1(F) \times_{\tilde{L}'(\tilde{\zeta})(F)} \tilde{L}'(\tilde{z\zeta})_1(F)$ qui fait passer des données choisies pour $\mathbf{L}'(\tilde{\zeta})$ à ces nouvelles données. Comme ci-dessus, il s'en déduit un isomorphisme

$$\iota(z,\rho)^{L,*}: D^{st}_{géom,\lambda(z\tilde{\zeta})_1}(\tilde{R}'(z\tilde{\zeta})_1(F)) \simeq D^{st}_{géom,\lambda(\tilde{\zeta})_1}(\tilde{R}'(\tilde{\zeta})_1(F)).$$

Le transfert comute au recollement donc celui-ci envoie $(\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})^{\tilde{L}'(z\tilde{\zeta})_1}$ sur $(\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})^{\tilde{L}'(\tilde{\zeta})_1}$. Il envoie $\boldsymbol{\delta}(z\tilde{\zeta})_1$ sur $\iota(z,\rho)^{L,*}(\boldsymbol{\delta}(z\tilde{\zeta})_1) = \iota(z,\rho)^{L,*} \circ (\iota(z)^{M,*})^{-1}(\boldsymbol{\delta}(\tilde{\zeta})_1)$. On a donc

$$(11) \qquad S^{\tilde{L}'(z\tilde{\zeta})_1}_{\tilde{R}'(z\tilde{\zeta})_1,\lambda(z\tilde{\zeta})_1}(\boldsymbol{\delta}(z\tilde{\zeta})_1, B^{\tilde{L}}, (\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})^{\tilde{L}'(z\tilde{\zeta})_1}) =$$

$$S^{\tilde{L}'(\tilde{\zeta})_1}_{\tilde{R}'(\tilde{\zeta})_1,\lambda(\tilde{\zeta})_1}(\iota(z,\rho)^{L,*} \circ (\iota(z)^{M,*})^{-1}(\boldsymbol{\delta}(\tilde{\zeta})_1), B^{\tilde{L}}, (\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})^{\tilde{L}'(\tilde{\zeta})_1}).$$

Le composé $(\iota(z)^M)^{-1} \circ \iota(z,\rho)^L$ est un automorphisme de $C^\infty_{c,\lambda(\tilde{\zeta})_1}(\tilde{R}'(\tilde{\zeta})_1(F))$. Il est de la forme $\varphi \mapsto \tilde{\lambda}_{z,\rho}\varphi$, où $\tilde{\lambda}_{z,\rho}$ est une certaine fonction continue sur $\tilde{R}'(\tilde{\zeta})_1(F)$ que nous allons calculer. On simplifie les notations en supprimant autant que possible $\tilde{\zeta}$ et z des notations. On pose $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_{z,\rho}$. On conserve les indices 1 pour les termes associés aux données en $\tilde{\zeta}$ et on les convertit en indices 2 pour ceux associés aux données en $z\tilde{\zeta}$. Par exemple, on note Δ_1 et Δ_2 les termes notés précedemment $\Delta(\tilde{\zeta})_1$ et $\Delta(z\tilde{\zeta})_1$. Soit $r'_1 \in \tilde{R}'_1(F)$. Notons r' sa projection dans $\tilde{R}'(F)$ et choisissons $r'_2 \in \tilde{R}'_2(F)$ se projetant sur r'. Par définition

$$\tilde{\lambda}(r'_1) = \tilde{\lambda}^M(r'_1, r'_2)^{-1}\tilde{\lambda}^L(r'_1, r'_2).$$

Fixons $l \in \tilde{L}(F)$ semi-simple et assez régulier et $l' \in \tilde{L}'(F)$ de sorte que leurs classes de conjugaison stable se correspondent. C'est possible puisqu'on a supposé L' relevant. Fixons des éléments $l'_1 \in \tilde{L}'_1(F)$ et $l'_2 \in \tilde{L}'_2(F)$ se projetant sur l'. Notons (a_1, a_2) l'élément de $L'_1(F) \times_{L'(F)} L'_2(F)$ tel que $(r'_1, r'_2) = (a_1 l'_1, a_2 l'_2)$. On a l'égalité

$$\tilde{\lambda}^L(r'_1, r'_2) = \lambda^L(a_1, a_2)\tilde{\lambda}^L(l'_1, l'_2) = \lambda^L(a_1, a_2)\Delta_2(l'_2, l)\Delta_1(l'_1, l)^{-1}.$$

On introduit $m \in \tilde{M}(F)$, $m'_1 \in \tilde{M}'_1(F)$ et $m'_2 \in \tilde{M}'_2(F)$ vérifiant des conditions analogues et $(b_1, b_2) \in M'_1(F) \times_{M'(F)} M'_2(F)$ tel que $(r'_1, r'_2) = (b_1 m'_1, b_2 m'_2)$. On a une relation analogue à celle ci-dessus. On se rappelle que $\Delta_i(m'_i, m)\Delta_i(l'_i, l)^{-1} = \boldsymbol{\Delta}_i(m'_i, m'; l'_i, l')$ pour $i = 1, 2$. On obtient

$$(12) \qquad \tilde{\lambda}(r'_1) = \lambda^M(b_1, b_2)^{-1}\lambda^L(a_1, a_2)\boldsymbol{\Delta}_1(m'_1, m; l'_1, l)\boldsymbol{\Delta}_2(m'_2, m; l'_2, l)^{-1}.$$

On calcule les facteurs de transfert ci-dessus en utilisant les définitions de [I] 2.2. Pour rendre les calculs plus clairs, on modifie les notations de cette référence : on y avait deux séries d'objets, la deuxième étant soulignée (T, $\underline{T}$, etc...) ; on affecte maintenant la première série d'un exposant M et la deuxième série d'un exposant L ; d'autre part, on conserve les indices 1 pour le facteur $\boldsymbol{\Delta}_1$ et on les transforme en indices 2 pour le facteur $\boldsymbol{\Delta}_2$. On fixe des diagrammes $(m', B^{M'}, T^{M'}, B^M, T^M, m)$ et $(l', B^{L'}, T^{L'}, B^L, T^L, l)$ et on utilise ces diagrammes pour calculer les deux facteurs. De même, on utilise les mêmes a-data et χ-data. On suppose que ces χ-data sont triviales sur les orbites galoisiennes asymétriques. Montrons que les facteurs Δ_{II} sont les mêmes pour les deux facteurs. Considérons par exemple les facteurs $\Delta_{II,1}(l', l)$ et $\Delta_{II,2}(l', l)$. Ce sont des produits sur les orbites pour l'action de Γ_F dans $\Sigma(T^L)_{res,ind}$. Le Levi $\hat{L}$ détermine un sous-ensemble $\Sigma^L(T^L)_{res,ind} \subset \Sigma(T^L)_{res,ind}$. Les contributions de ce sous-ensemble aux deux facteurs sont les mêmes par définition. Pour $\alpha_{res} \in \Sigma(T^L)_{res,ind} - \Sigma^L(T^L)_{res,ind}$, l'orbite galoisienne de α_{res} est asymétrique (un sous-groupe parabolique $\hat{P} \in \mathcal{P}(\hat{L})$ invariant par Γ_F

détermine une partition de $\Sigma(T^L)_{res,ind}-\Sigma^L(T^L)_{res,ind}$ en deux ensembles opposés invariants par Γ_F). Puisqu'on a supposé les χ-data triviales sur les orbites asymétriques, la contribution de $\Sigma(T^L)_{res,ind}-\Sigma^L(T^L)_{res,ind}$ est égale à 1. Cela démontre l'assertion. Donc

$$(13)\qquad \boldsymbol{\Delta}_1(m_1',m;l_1',l)\boldsymbol{\Delta}_2(m_2',m;l_2',l)^{-1}=\Delta_{1,imp}(m_1',m;l_1',l)\Delta_{2,imp}(m_2',m;l_2',l)^{-1}.$$

Le tore $U=(T^M_{sc}\times T^L_{sc})/diag_-(Z(G_{SC}))$ qui intervient dans les définitions est le même pour les deux facteurs. Le cocycle V à valeurs dans ce tore est aussi le même. Les termes à valeurs dans $\hat{U}$ sont $\boldsymbol{\zeta}=(\zeta_{sc},\zeta_{sc})$ pour le facteur $\Delta_{1,imp}$ et $\mathbf{z}\boldsymbol{\zeta}=(z_{sc}\zeta_{sc},z_{sc}\zeta_{sc})$ pour le facteur $\Delta_{2,imp}$, où on a écrit $\tilde{\zeta}=\zeta\hat{\theta}$. Les tores S_1 et S_2 sont différents. Introduisons le tore $\mathfrak{T}^M_{12}$ produit fibré de T^M_1, T^M_2 et T^M au-dessus de $T^{\mathbf{M}'}$ et le tore analogue $\mathfrak{T}^L_{12}$. Notons $\mathfrak{Z}_{12}$ le produit fibré de $\mathfrak{Z}_1$ et $\mathfrak{Z}_2$ au-dessus de $Z(G)$. Posons $S_{12}=(\mathfrak{T}^M_{12}\times\mathfrak{T}^L_{12})/diag_-(\mathfrak{Z}_{12})$. Il y a des homomorphismes naturels d'oubli d'une série de variables

$$\begin{array}{ccccc} & & S_{12} & & \\ & \swarrow p_1 & & \searrow p_2 & \\ S_1 & & & & S_2 \end{array}$$

Posons $\nu^M_{12}=(\mu^M_1,\mu^M_2,\nu^M)\in\mathfrak{T}^M_{12}$, définissons de même ν^L_{12}, notons $\boldsymbol{\nu}_{12}$ l'image de $(\nu^M_{12},(\nu^L_{12})^{-1})$ dans S_{12}. Alors $p_i(\boldsymbol{\nu}_{12})=\boldsymbol{\nu}_i$ pour $i=1,2$. De plus, le couple $(V,\boldsymbol{\nu}_{12})$ définit un élément de $H^1(\Gamma_F;U\stackrel{1-\theta}{\to}S_{12})$. Pour $i=1,2$, on a donc $(V,\boldsymbol{\nu}_i)=p_i(V,\boldsymbol{\nu}_{12})$ en notant encore selon notre habitude $p_i:H^1(\Gamma_F;U\stackrel{1-\theta}{\to}S_{12})\to H^1(\Gamma_F;U\stackrel{1-\theta}{\to}S_i)$ l'homomorphisme déduit fonctoriellement du p_i précédent. Par une propriété de compatibilité, on obtient

$$\Delta_{i,imp}(m_i',m;l_i',l)=\left\{\begin{array}{ll} <(V,\boldsymbol{\nu}_{12}),(\hat{p}_1(\hat{V}_1),\boldsymbol{\zeta})>^{-1}, & \text{si } i=1,\\ <(V,\boldsymbol{\nu}_{12}),(\hat{p}_2(\hat{V}_2),\mathbf{z}\boldsymbol{\zeta})>^{-1}, & \text{si } i=2,\end{array}\right.$$

où $\hat{p}_i:H^1(W_F;\hat{S}_i\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{U})\to H^1(W_F;\hat{S}_{12}\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{U})$ est dual de p_i. Donc

$$(14)\qquad \Delta_{1,imp}(m_1',m;l_1',l)\Delta_{2,imp}(m_2',m;l_2',l)^{-1}=<(V,\boldsymbol{\nu}_{12}),(\hat{V}_{12},\mathbf{z})>,$$

où $\hat{V}_{12}=\hat{p}_1(\hat{V}_1)^{-1}\hat{p}_2(\hat{V}_2)$. Le tore dual $\hat{\mathfrak{T}}^M_{12}$ est le quotient de $\hat{T}^M_1\times\hat{T}^M_2\times\hat{T}^M$ par le groupe $\{(t_1,t_2,t)\in\hat{T}^{M'};t_1t_2t=1\}$ plongé par $(t_1,t_2,t)\mapsto(\hat{\xi}_1(t_1),\hat{\xi}_2(t_2),t)$. Le tore $\hat{S}_{12}$ est le sous-tore de $\hat{\mathfrak{T}}^M_{12}\times\hat{\mathfrak{T}}^L_{12}\times\hat{T}_{sc}$ formé des (t^M,t^L,t_{sc}) tels que $j(t_{sc})=t^M(t^L)^{-1}$ (les notations sont adaptées de [I] 2.2 ; il faut aussi mettre sur ce tore une action galoisienne définie comme dans ce paragraphe). Notons $\hat{V}^M_{12}$, $\hat{V}^L_{12}$ et $\hat{V}_{12,sc}$ les trois composantes de $\hat{V}_{12}$.

Calculons $\hat{V}^L_{12}(w)$ pour $w\in W_F$. Il convient de choisir $(g(w),w)\in\mathcal{G}'(\tilde{\zeta})$ tel que $ad_{g(w)}\circ w_G=w_{G'(\tilde{\zeta})}$ et $(g_z(w),w)\in\mathcal{G}'(z\tilde{\zeta})$ tel que $ad_{g_z(w)}\circ w_G=w_{G'(z\tilde{\zeta})}$. Puisque $\mathcal{G}'(\tilde{\zeta})=\hat{G}'(\tilde{\zeta})\mathcal{R}'$, on peut certainement supposer que $(g(w),w)$ appartient à $\mathcal{R}'$. On pose plutôt $g(w)=r(w)\in\hat{R}$. Puisque $\hat{G}'(\tilde{\zeta})$ et $\hat{G}'(z\tilde{\zeta})$ ont en commun le Levi standard $\hat{M}'$, on peut supposer que leurs actions galoisiennes coïncident sur ce Levi. Donc $g_z(w)=m'(w)r(w)$, avec $m'(w)\in Z(\hat{M}')$. Puisque ce groupe est produit de $Z(\hat{M}')^0$ et de $Z(\hat{G}'(z\tilde{\zeta}))$ et que l'on peut modifier $g_z(w)$ par un élément de ce dernier groupe, on peut même supposer $m'(w)\in Z(\hat{M}')^0$. On pose $\hat{\xi}_1(r(w),w)=(\zeta_1(w),w)$, $\hat{\xi}_2(m'(w)r(w),w)=(\zeta_2(w),w)$. On a $\hat{V}^L_{12}(w)=(\zeta_1(w)^{-1},\zeta_2(w),t_{T^L,1}(w)^{-1}t_{T^L,2}(w))$ (ici encore, on affecte d'un indice 1, resp. 2, le terme provenant des données en $\tilde{\zeta}$, resp. $z\tilde{\zeta}$). Dans les termes $t_{T^L,i}(w)$ interviennent des termes $\hat{n}(\omega_{T^L}(w))$ et $\hat{r}_{T^L}(w)$. Ce sont les mêmes pour $i=1,2$ et ils disparaissent dans le quotient ci-dessus. De même, les termes $r(w)$ disparaissent. Donc

$$(15)\qquad t_{T^L,1}(w)^{-1}t_{T^L,2}(w)=\hat{r}_{T^L,G'(\tilde{\zeta})}(w)\hat{n}_{G'(\tilde{\zeta})}(\omega_{T^L,G'(\tilde{\zeta})}(w))m'(w)^{-1}$$
$$\hat{n}_{G'(z\tilde{\zeta})}(\omega_{T^L,G'(z\tilde{\zeta})}(w))^{-1}\hat{r}_{T^L,G'(z\tilde{\zeta})}(w)^{-1}.$$

Considérons les termes $\hat{r}_{T^L,G'(\tilde{\zeta})}(w)$ et $\hat{n}_{G'(\tilde{\zeta})}(\omega_{T^L,G'(\tilde{\zeta})}(w))$. En remplaçant dans leurs définitions $\hat{G}'(\tilde{\zeta})$ par $\hat{L}'(\tilde{\zeta})$ et en utilisant la paire de Borel épinglée de ce groupe que l'on a fixée plus haut, on obtient des termes $\hat{r}_{T^L,L'(\tilde{\zeta})}(w)$ et $\hat{n}_{L'(\tilde{\zeta})}(\omega_{T^L,L'(\tilde{\zeta})}(w))$. Montrons que :

(16) il existe $x\in\hat{T}_{sc}^{L'}$ tel que

$$\hat{r}_{T^L,G'(\tilde{\zeta})}(w)\hat{n}_{G'(\tilde{\zeta})}(\omega_{T^L,G'(\tilde{\zeta})}(w))=xw_{T^L}(x)^{-1}\hat{r}_{T^L,L'(\tilde{\zeta})}(w)\hat{n}_{L'(\tilde{\zeta})}(\omega_{T^L,L'(\tilde{\zeta})}(w))$$

pour tout $w\in W_F$.

On supprime les $\tilde{\zeta}$ le temps de cette preuve. Si $\hat{L}'$ était standard dans $\hat{G}'$, les termes pour $\hat{G}'$ et $\hat{L}'$ seraient égaux et l'assertion serait claire. En tout cas, on a l'égalité $\omega_{T^L,G'}(w)=\omega_{T^L,L'}(w)$ par définition. Notons simplement $\omega(w)=\omega_{T^L,G'}(w)$ et $\hat{n}=\hat{n}_{G'}$. La section de Springer $\hat{n}$ est relative à la paire de Borel épinglée fixée $\hat{\mathcal{E}}'$ de $\hat{G}'$. Notons $(\hat{B}',\hat{T}')$ la paire de Borel sous-jacente à $\hat{\mathcal{E}}'$. On rappelle que $\hat{B}'=\hat{B}\cap\hat{G}'$ et $\hat{T}'=\hat{T}^{\hat{\theta},0}$. Fixons un sous-groupe parabolique $\hat{P}'\in\mathcal{P}^{\hat{G}'}(\hat{L}')$ invariant par Γ_F. Notons $\hat{B}'_\sharp$ le sous-groupe de Borel de $\hat{G}'$ contenu dans $\hat{P}'$ et dont l'intersection avec $\hat{L}'$ coïncide avec celle de $\hat{B}'$. On peut compléter la paire $(\hat{B}'_\sharp,\hat{T}')$ en une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}'_\sharp$ conservée par Γ_F, de sorte que sa restriction à $\hat{L}'$ soit la paire de Borel épinglée de $\hat{L}'$. De cette paire se déduit une autre section de Springer pour $\hat{G}'$ dont $\hat{n}_{L'}$ est la restriction puisque $\hat{L}'$ est standard pour cette paire. Soit $g_{ad}\in\hat{G}'_{AD}$ tel que $ad_{g_{ad}}$ envoie $\hat{\mathcal{E}}'$ sur $\hat{\mathcal{E}}'_\sharp$. C'est un élément de $\hat{G}'^{\Gamma_F}_{AD}$. D'après [K] lemme 1.6, on peut le relever en un élément $g\in\hat{G}'^{\Gamma_F}_{SC}$. Cet élément normalise $\hat{T}'$ donc définit un élément $u\in W^{G'}$. Par transport de structure, on a $\hat{n}_{\hat{L}'}(\omega(w))=g\hat{n}(u^{-1}\omega(w)u)g^{-1}$. Pour $u_1,u_2\in W^{G'}$, on a l'égalité $\hat{n}(u_1u_2)=t(u_1,u_2)\hat{n}(u_1)\hat{n}(u_2)$ (cf. [LS] lemme 2.1.A) où

$$t(u_1,u_2)=\prod_{\alpha>0,u_1^{-1}(\alpha)<0,u_2^{-1}u_1^{-1}(\alpha)>0}\check{\alpha}(-1).$$

Ici les α parcourent les racines de $\hat{T}'$ dans $\hat{G}'$ et la positivité est relative à $\hat{B}'$. On calcule

$$\hat{n}(u^{-1}\omega(w)u)=t(u^{-1},\omega(w)u)\hat{n}(u^{-1})t(\omega(w),u)\hat{n}(\omega(w))\hat{n}(u),$$
$$\hat{n}(u^{-1})=t(u^{-1},u)\hat{n}(u)^{-1},$$

d'où

$$\hat{n}(u^{-1}\omega(w)u)=t(u^{-1},\omega(w)u)t(u^{-1},u)u^{-1}(t(\omega(w),u))\hat{n}(u)^{-1}\hat{n}(\omega(w))\hat{n}(u).$$

On calcule

$$t(u^{-1},\omega(w)u)t(u^{-1},u)=\prod_{\alpha>0,u(\alpha)<0,u^{-1}\omega(w)^{-1}u(\alpha)<0}\check{\alpha}(-1).$$

Mais ce produit est vide. En effet $\alpha>0$ équivaut à $u(\alpha)>_\sharp 0$ où $>_\sharp$ est l'ordre défini par $\hat{B}'_\sharp$. Par définition de ce Borel, les conditions $u(\alpha)<0$ et $u(\alpha)>_\sharp 0$ interdisent à $u(\alpha)$ d'être dans $\hat{L}'$. Pour les racines hors de ce Levi, $\omega(w)$ conserve l'ordre

$>_\sharp$. Donc $\omega(w)^{-1}u(\alpha) >_\sharp 0$ puis $u^{-1}\omega(w)^{-1}u(\alpha) > 0$. Cela démontre l'assertion. Donc $t(u^{-1}, \omega(w)u)t(u^{-1}, u) = 1$. On en déduit

$$\hat{n}_{\hat{L}'}(\omega(w)) = t(\omega(w), u)x^{-1}\hat{n}(\omega(w))x,$$

où $x = g\hat{n}(u)^{-1}$. Cet élément x appartient à $\hat{T}'_{sc} \simeq \hat{T}^{L'}_{sc}$. Puisque g est fixe par Γ_F, u l'est aussi. Puisque la section de Springer est équivariante par Γ_F, $\hat{n}(u)$ est fixe par Γ_F, donc x aussi. Alors $\hat{n}(\omega(w))x = \omega(x) \circ w_{G'}(x)\hat{n}(\omega(w)) = w_{T^L}(x)\hat{n}(\omega(w))$. D'où

$$\hat{n}_{\hat{L}'}(\omega(w)) = t(\omega(w), u)x^{-1}w_{T^L}(x)\hat{n}(\omega(w)).$$

Les termes $\hat{r}_{T^L,G'}(w)$ et $\hat{r}_{T^L,L'}(w)$ sont des produits sur les racines α. En fait, $\hat{r}_{T^L,L'}(w)$ est exactement égal à la contribution à $\hat{r}_{T^L,G'}(w)$ des racines dans $\hat{L}'$. Comme on l'a remarqué, les racines hors de ce Levi appartiennent à des orbites asymétriques pour lesquelles les χ-data sont triviales. Pour un couple $(\mathcal{O}, -\mathcal{O})$ de telles orbites, on peut supposer que $\mathcal{O}$ est formé d'éléments positifs pour l'ordre $>_\sharp$. On voit alors que

$$\hat{r}_{T^L,G'}(w)\hat{r}_{T^L,L'}(w)^{-1} = \prod_{\alpha \text{ hors de } \hat{L}', \alpha>0, \alpha>_\sharp 0, w_{T^L}^{-1}(\alpha)<0} \check{\alpha}(-1).$$

Puisque $w_{T^L} = \omega(w)w_{G'}$ et que l'action $w_{G'}$ préserve $\hat{B}'$, la condition $w_{T^L}^{-1}(\alpha) < 0$ équivaut à $\omega(w)^{-1}(\alpha) < 0$. Pour α hors de $\hat{L}'$, $\omega(w)$ préserve l'ordre $>_\sharp$. La condition $\alpha >_\sharp 0$ équivaut à $\omega(w)^{-1}(\alpha) >_\sharp 0$. Le produit ci-dessus est donc sur l'ensemble des α hors de $\hat{L}'$ tels que $\alpha > 0$, $\omega(w)^{-1}(\alpha) < 0$ et $\omega(w)^{-1}(\alpha) >_\sharp 0$. Mais alors, la condition α hors de $\hat{L}'$ devient superflue car les deux dernières relations interdisent à α d'être dans ce Levi. En remplaçant la condition $\omega(w)^{-1}(\alpha) >_\sharp 0$ par la condition équivalente $u^{-1}\omega(w)^{-1}(\alpha) > 0$, on obtient l'égalité

$$\hat{r}_{T^L,G'}(w)\hat{r}_{T^L,L'}(w)^{-1} = t(\omega(w), u).$$

En rassemblant ces calculs, on obtient (16).

Remarque. On n'a pas pris soin du sens des indices sc. L'élément x construit appartient à $\hat{G}'_{SC}$. On n'aura besoin que de son image naturelle dans $\hat{G}_{SC}$.

On effectue les mêmes constructions pour les données relatives à $z\tilde{\zeta}$. Cela nous fournit deux éléments x_1 et x_2. On a évidemment l'égalité $\hat{r}_{T^L,L'(\tilde{\zeta})}(w) = \hat{r}_{T^L,L'(z\tilde{\zeta})}(w)$. On a ajusté ρ de sorte que ad_ρ transporte la paire de Borel épinglée de $\hat{L}'(\tilde{\zeta})$ sur celle de $\hat{L}'(z\tilde{\zeta})$. Il en résulte que

$$\hat{n}_{L'(z\tilde{\zeta})}(\omega_{T^L,L'(z\tilde{\zeta})}(w)) = \rho\hat{n}_{L'(\tilde{\zeta})}(\omega_{T^L,L'(\tilde{\zeta})}(w))\rho^{-1}.$$

A ce point, la formule (15) se récrit

$$t_{T^L,1}(w)^{-1}t_{T^L,2}(w) = xw_{T^L}(x)^{-1}\hat{n}_{L'(\tilde{\zeta})}(\omega_{T^L,L'(\tilde{\zeta})}(w))m'(w)^{-1}\rho\hat{n}_{L'(\tilde{\zeta})}(\omega_{T^L,L'(\tilde{\zeta})}(w))^{-1}\rho^{-1},$$

où $x = x_1x_2^{-1}$. Utilisons encore que $ad_\rho : \hat{L}'(\tilde{\zeta}) \to \hat{L}'(z\tilde{\zeta})$ est équivariante pour les actions galoisiennes. On a $w_{L'(\tilde{\zeta})} = ad_{r(w)} \circ w_G$ et $w_{L'(z\tilde{\zeta})} = ad_{m'(w)r(w)} \circ w_G$. De plus $\rho \in Z(\hat{R})$ donc commute à $r(w)$. Alors l'égalité $w_{L'(z\tilde{\zeta})} \circ ad_\rho = ad_\rho \circ w_{L'(\tilde{\zeta})}$ entraîne que $\rho^{-1}m'(w)w_G(\rho) \in Z(\hat{L}'(\tilde{\zeta}))$. Donc cet élément commute à $\hat{n}_{L'(\tilde{\zeta})}(\omega_{T^L,L'(\tilde{\zeta})}(w))$. Alors

$$t_{T^L,1}(w)^{-1}t_{T^L,2}(w) = xw_{T^L}(x)^{-1}\hat{n}_{L'(\tilde{\zeta})}(\omega_{T^L,L'(\tilde{\zeta})}(w))w_G(\rho)w_G(\rho)^{-1}$$

$$m'(w)^{-1}\rho\hat{n}_{L'(\tilde{\zeta})}(\omega_{T^L,L'(\tilde{\zeta})}(w))^{-1}\rho^{-1}$$
$$= xw_{T^L}(x)^{-1}\hat{n}_{L'(\tilde{\zeta})}(\omega_{T^L,L'(\tilde{\zeta})}(w))w_G(\rho)\hat{n}_{L'(\tilde{\zeta})}(\omega_{T^L,L'(\tilde{\zeta})}(w))^{-1}w_G(\rho)^{-1}m'(w)^{-1}$$
$$= xw_{T^L}(x)^{-1}w_{T^L}(\rho)w_G(\rho)^{-1}m'(w)^{-1},$$

puisque $ad_{\hat{n}_{L'(\tilde{\zeta})}(\omega_{T^L,L'(\tilde{\zeta})}(w))} \circ w_G = w_{T^L}$. On obtient

$$\hat{V}^L_{12}(w) = (\zeta_1(w)^{-1}, \zeta_2(w), xw_{T^L}(x)^{-1}w_{T^L}(\rho)w_G(\rho)^{-1}m'(w)^{-1}).$$

On a effectué les calculs dans le tore $\hat{T}^L_1 \times \hat{T}^L_2 \times \hat{T}^L$. En fait $\hat{V}^L_{12}(w)$ appartient au tore $\hat{\mathfrak{T}}^L_{12}$ qui est un quotient du précédent. En particulier, puisque $\hat{m'}(w) \in Z(\hat{M}') \subset \hat{T}^{\hat{\theta},0}$, on peut multiplier l'expression précédente par $(1, \hat{\xi}_2(m'(w))^{-1}, m'(w))$ qui appartient au noyau de la projection. On obtient finalement

$$\hat{V}^L_{12}(w) = (\zeta_1(w)^{-1}, \zeta'_2(w), xw_{T^L}(x)^{-1}w_{T^L}(\rho)w_G(\rho)^{-1}),$$

où $\zeta'_2(w) = \hat{\xi}_2(m'(w))^{-1}\zeta_2(w)$. Notons que $\hat{\xi}_2(r(w), w) = (\zeta'_2(w), w)$.

On calcule de même les composantes $\hat{V}^M_{12}(w)$ et $\hat{V}_{12,sc}(w)$. Le calcul est beaucoup plus simple pour $\hat{V}^M_{12}(w)$ puisque le groupe $\hat{M}'$ est le même pour les deux données et est standard. La conjugaison par ρ n'intervient plus. On obtient

$$\hat{V}^M_{12}(w) = (\zeta_1(w)^{-1}, \zeta'_2(w), 1),$$
$$\hat{V}_{12,sc}(w) = x^{-1}w_{T^L}(x)w_G(\rho_{sc})w_{T^L}(\rho_{sc})^{-1},$$

où, comme toujours, ρ_{sc} est un élément de $\hat{G}_{SC}$ qui a même image que ρ dans $\hat{G}_{AD}$. A ce point, on voit que l'on peut supprimer les x des formules ci-dessus en multipliant $(\hat{V}_{12}, \mathbf{z})$ par le cobord de l'élément $(1, x^{-1}, 1) \in \hat{S}_{12}$.

Introduisons le tore $\hat{T}^M_{12}$ quotient de $\hat{T}^M_1 \times \hat{T}^M_2$ par $\hat{T}^{M'}$ plongé par $\hat{\xi}_1 \times \hat{\xi}_2^{-1}$. Notons $\hat{\Sigma}_{ML}$ le sous-groupe des $(t^M, t^L, t_{sc}) \in \hat{T}^M_{12} \times \hat{\mathcal{T}}^L_{12} \times \hat{T}^L_{sc}$ tels que $j(t_{sc}) = t^M(t^L)^{-1}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Sigma}_{ML} & \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} & \hat{T}^L_{sc} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{S}_{12} & \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} & \hat{U} \end{array}$$

La flèche $1-\hat{\theta}$ du haut est $(t^M, t^L, t_{sc}) \mapsto (1-\hat{\theta})(t_{sc})^{-1}$. Le tore $\hat{T}^M_{12}$ s'envoie naturellement dans $\hat{\mathcal{T}}^M_{12}$ donc $\hat{\Sigma}^{ML}$ s'envoie naturellement dans $\hat{S}_{12}$. C'est la flèche verticale de gauche. La flèche verticale de droite est $t_{sc} \mapsto (1, t_{sc})$. On vérifie que tous ces homomorphismes sont équivariants pour les actions galoisiennes. De ce diagramme se déduisent des homomorphismes duaux

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Gamma_F; U \stackrel{1-\theta}{\to} S_{12}) & \times & H^1(W_F; \hat{S}_{12} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{U}) \\ \downarrow & & \uparrow \\ H^1(\Gamma_F; T^L_{ad} \stackrel{1-\theta}{\to} \Sigma_{ML}) & \times & H^1(W_F; \hat{\Sigma}_{ML} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{T}^L_{sc}) \end{array}$$

où bien sûr, Σ_{ML} est le tore dual de $\hat{\Sigma}_{ML}$. Puisque $z \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$ et puisque l'image de ce groupe dans $\hat{G}_{AD}$ est connexe, on peut supposer $z_{sc} \in Z(\hat{M}_{sc})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0} \subset (\hat{T}^M_{sc})^{\Gamma_F,0}$. Donc l'élément $(z_{sc}, 1)$ appartient à $\hat{U}^{\Gamma_F,0}$. Or ce groupe est le noyau de l'accouplement avec

$H^1(\Gamma_F; U \stackrel{1-\theta}{\to} S_{12})$ ([KS], lemme A3B). Dans la formule (14), on peut donc remplacer le terme $\mathbf{z}$ par $(1, z_{sc})$. Pour $w \in W_F$, posons

$$X_{ML}^M(w) = (\zeta_1(w)^{-1}, \zeta_2'(w)) \in \hat{T}_{12}^M,\ X_{ML}^L(w) = \hat{V}_{12}^L(w) \in \hat{\mathcal{T}}_{12}^L$$

$$X_{ML,sc}(w) = \hat{V}_{12,sc}(w) \in \hat{T}_{sc} \simeq \hat{T}_{sc}^L$$

les deux derniers termes étant débarrassés des x comme on l'a dit ci-dessus. On note $X_{ML}(w) = (X_{ML}^M(w), X_{ML}^L(w), X_{ML,sc}(w))$. C'est un élément de $\hat{\Sigma}_{ML}$. On vérifie que le couple (X_{ML}, z_{sc}) est un cocycle et définit donc un élément de $H^1(W_F; \hat{\Sigma}_{ML} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{T}_{sc}^L)$. Le cocycle $(\hat{V}_{12}, (1, z_{sc}))$ est l'image de cet élément par la flèche de droite du diagramme ci-dessus. Notons $\boldsymbol{\nu}_{ML}$ l'image naturelle de $\boldsymbol{\nu}_{12}$ dans Σ_{ML}. L'image par la flèche de gauche de $(V, \boldsymbol{\nu}_{12})$ est $(V_{T^L,ad}^{-1}, \boldsymbol{\nu}_{ML})$. Par compatibilité des produits, (12) se récrit

$$\Delta_{1,imp}(m_1', m; l_1', l)\Delta_{2,imp}(m_2', m; l_2', l)^{-1} =< (V_{T^L,ad}^{-1}, \boldsymbol{\nu}_{ML}), (X_{ML}, z_{sc}) > .$$

Le tore T_{12}^M dual de $\hat{T}_{12}^M$ est le produit fibré de T_1^M et T_2^M au-dessus de $T^{M'}$. Alors Σ_{ML} est le quotient de $T_{12}^M \times \mathcal{T}_{12}^L$ par l'image antidiagonale de $\mathfrak{Z}_{12}$ (ce groupe est un sous-groupe de $\mathcal{T}_{12}^L$ et il s'envoie naturellement dans T_{12}^M). On note abusivement ce quotient $(T_{12}^M \times \mathcal{T}_{12}^L)/diag_-(\mathfrak{Z}_{12})$. On a introduit des éléments $r_1' \in \tilde{R}_1'(F)$, $r_2' \in \tilde{R}_2'(F)$ et $r' \in \tilde{R}'(F)$. Supposons-les assez réguliers. On note leurs commutants T_1^R,T_2^R et $T^{R'}$ et on introduit leur produit fibré T_{12}^R au-dessus de de $T^{R'}$ (l'exposant R est ici formel, il n'y a pas de groupe R). On introduit les tores

$$\Sigma_{MRL} = (T_{12}^M \times T_{12}^R \times \mathcal{T}_{12}^L)/\{(z^M, z^R, z^L) \in (\mathfrak{Z}_{12})^3; z^M z^R z^L = 1\},$$

$$\Sigma_{MR} = (T_{12}^M \times T_{12}^R)/diag_-(\mathfrak{Z}_{12}),$$
$$\Sigma_{RL} = (T_{12}^R \times \mathcal{T}_{12}^L)/diag_-(\mathfrak{Z}_{12}),$$

avec les mêmes abus d'écriture que ci-dessus. Il y a des homomorphismes

$$(17) \qquad \begin{array}{ccc} \Sigma_{MR} \times \Sigma_{RL} & & \Sigma_{ML} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \Sigma_{MRL} & \end{array}$$

Celui de gauche est $(t^M, t^R), (u^R, t^L) \mapsto (t^M, t^R u^R, t^L)$, celui de droite est $(t^M, t^L) \mapsto (t^M, 1, t^L)$. On en déduit aisément un diagramme d'homomorphismes duaux

$$(18) \qquad \begin{array}{ccc} H^1(\Gamma_F; T_{ad}^L \stackrel{1-\theta}{\to} \Sigma_{ML}) & \times & H^1(W_F; \hat{\Sigma}_{ML} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{T}_{sc}^L) \\ \downarrow & & \uparrow \\ H^1(\Gamma_F; T_{ad}^L \stackrel{1-\theta}{\to} \Sigma_{MRL}) & \times & H^1(W_F; \hat{\Sigma}_{MRL} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{T}_{sc}^L) \\ \uparrow & & \downarrow \\ (H^0(\Gamma_F; \Sigma_{MR}) \times H^1(\Gamma_F; T_{ad}^L \stackrel{1-\theta}{\to} \Sigma_{RL})) & \times & (H^1(W_F; \hat{\Sigma}_{MR}) \times H^1(W_F; \hat{\Sigma}_{RL} \stackrel{1-\hat{\theta}}{\to} \hat{T}_{sc}^L)) \end{array}$$

Le tore $\hat{\Sigma}_{MRL}$ dual de Σ_{MRL} est le groupe des $(t^M, t^R, t^L, t_{sc}^{MR}, t_{sc}^{RL}) \in \hat{T}_{12}^M \times \hat{T}_{12}^R \times \hat{\mathcal{T}}_{12}^L \times \hat{T}_{sc}^{\hat{\theta}} \times \hat{T}_{sc}$ tels que $j(t_{sc}^{MR}) = t^M(t^R)^{-1}$ et $j(t_{sc}^{RL}) = t^R(t^L)^{-1}$, muni d'une action galoisienne convenable. Pour $w \in W_F$, posons

$$X_{MRL}^M(w) = X_{ML}^M(w) \in \hat{T}_{12}^M,\ X_{MRL}^R(w) = (\zeta_1(w)^{-1}, \zeta_2'(w)) \in \hat{T}_{12}^R,$$

$$X^L_{MRL}(w)=X^L_{ML}(w)\in\hat{\mathcal{T}}^L_{12},\ X^{MR}_{MRL,sc}(w)=1,\ X^{RL}_{MRL,sc}(w)=X_{ML,sc}(w)\in\hat{T}_{sc}.$$

On note $X_{MRL}(w)$ l'élément $(X^M_{MRL}(w),X^R_{MRL}(w),X^L_{MRL}(w),X^{MR}_{MRL,sc}(w),X^{RL}_{MRL,sc}(w))$ de $\hat{\Sigma}_{MRL}$. On vérifie que le couple (X_{MRL},z_{sc}) est un cocycle et définit un élément de $H^1(W_F;\hat{\Sigma}_{MRL}\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{T}^L_{sc})$. Le cocycle (X_{MR},z_{sc}) en est l'image par la flèche de droite supérieure du diagramme ci-dessus. Par compatibilité des produits, on en déduit

$$\Delta_{1,imp}(m'_1,m;l'_1,l)\Delta_{2,imp}(m'_2,m;l'_2,l)^{-1}=<(V^{-1}_{T^L,ad},\boldsymbol{\nu}_{MRL}),(X_{MRL},z_{sc})>,$$

où $\boldsymbol{\nu}_{MRL}$ est l'image de $\boldsymbol{\nu}_{ML}$ dans Σ_{MRL}. Notons $\boldsymbol{\mu}_{MR}$ l'image naturelle de $((\mu^M_1,\mu^M_2),(\mu^R_1,\mu^R_2)^{-1})$ dans Σ_{MR} et $\boldsymbol{\nu}_{RL}$ l'image naturelle de $((\mu^R_1,\mu^R_2),(\nu^L_{12})^{-1})$ dans Σ_{RL}. On vérifie que $\boldsymbol{\nu}_{MRL}$ est l'image de $(\boldsymbol{\mu}_{MR},\boldsymbol{\nu}_{RL})$ par la flèche de gauche de (17). On vérifie aussi que $\boldsymbol{\mu}_{MR}\in\Sigma^{\Gamma_F}_{MR}=H^0(\Gamma_F;\Sigma_{MR})$ et que $(V^{-1}_{T^L,ad},\boldsymbol{\nu}_{RL})$ définit un élément de $H^1(\Gamma_F;T^L_{ad}\stackrel{1-\theta}{\to}\Sigma_{RL}))$. Donc $(V^{-1}_{T^L,ad},\boldsymbol{\nu}_{MRL})$ est l'image de $(\boldsymbol{\mu}_{MR},(V^{-1}_{T^L,ad},\boldsymbol{\nu}_{RL}))$ par la flèche de gauche inférieure de (18). Par compatibilité des produits,

$$(19)\qquad \Delta_{1,imp}(m'_1,m;l'_1,l)\Delta_{2,imp}(m'_2,m;l'_2,l)^{-1}=<\boldsymbol{\mu}_{MR},X_{MR}>$$
$$<(V^{-1}_{T^L,ad},\boldsymbol{\nu}_{RL}),(X_{RL},z_{sc})>,$$

où (X_{MR},X_{RL}) est l'image de X_{MRL} par l'homomorphisme dual de celui de gauche de (17).

Pour $w\in W_F$, $X_{MR}(w)$ est l'image de $(X^M_{MRL}(w),X^R_{MRL}(w),X^{MR}_{MRL,sc}(w))$ dans $\hat{\Sigma}_{MR}$. Notons $\hat{M}'_{12}$ le groupe dual du produit fibré $M'_1\times_{M'}M'_2$. On a l'inclusion naturelle diagonale $Z(\hat{M}'_{12})\to\hat{\Sigma}_{MR}$. On voit que X_{MR} est l'image par cette inclusion du cocycle $w\mapsto(\zeta_1(w)^{-1},\zeta'_2(w))\in Z(\hat{M}'_{12})$. On se rappelle que $\hat{\xi}_1(r(w),w)=(\zeta_1(w),w)$, $\hat{\xi}_2(r(w),w)=(\zeta'_2(w),w)$. Alors le cocycle précédent est l'inverse du cocycle qui définit le caractère λ^M, cf. [I] 2.5. En reprenant la preuve du lemme [I] 2.5, on calcule

$$(20)\qquad <\boldsymbol{\mu}_{MR},X_{MR}>=\lambda^M(b_1,b_2).$$

Notons $\hat{L}'_{12}$ le groupe dual du produit fibré $L'_1\times_{L'}L'_2$. On se rappelle que le recollement est ici relatif non pas aux homomorphismes $\hat{\xi}_1$ et $\hat{\xi}_2$, mais aux homomorphismes $\hat{\xi}_1$ et $\hat{\xi}_2\circ ad_\rho$. On a $\hat{\xi}_2\circ ad_\rho(r(w),w)=(\hat{\xi}_2(\rho w_G(\rho)^{-1})\zeta'_2(w),w)$. Le caractère λ^L est donc défini par le cocycle $w\mapsto(\zeta_1(w),\hat{\xi}_2(w_G(\rho)\rho^{-1})\zeta'_2(w)^{-1})\in Z(\hat{L}'_{12})$. Ce groupe s'envoie naturellement dans $\hat{\Sigma}_{RL}$. Notons D le cocycle de W_F à valeurs dans $\hat{\Sigma}_{RL}$ qui est l'image de l'inverse du précédent. Introduisons le tore $\hat{\mathcal{Y}}_{RL}$ formé des $(t^R,t^L,t_{sc})\in\hat{T}^{R'}\times\hat{T}^L\times\hat{T}_{sc}$ tels que $j(t_{sc})=t^R(t^L)^{-1}$, muni d'une action galoisienne similaire à celle sur Σ_{RL}. Il y a un homomorphisme naturel $\hat{\mathcal{Y}}_{RL}\to\hat{\Sigma}_{RL}$. On se rappelle que $\rho\in Z(\hat{R})_*$. Donc, pour $w\in W_F$, $w_G(\rho)\rho^{-1}$ appartient à $Z(\hat{R})\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0}\subset\hat{T}^{R'}$. Posons

$$Y^R_{RL}(w)=w_G(\rho)\rho^{-1}\in\hat{T}^{R'},\ Y^L_{RL}(w)=w_{T^L}(\rho)\rho^{-1}\in\hat{T}^L,\ Y_{RL,sc}=w_G(\rho_{sc})w_{T^L}(\rho_{sc})^{-1}\in\hat{T}_{sc},$$

puis $Y_{RL}(w)=(Y^R_{RL}(w),Y^L_{RL}(w),Y_{RL,sc}(w))\in\hat{\mathcal{Y}}_{RL}$. Il y a un homomorphisme naturel $\hat{p}:\hat{\mathcal{Y}}_{RL}\to\Sigma_{RL}$. Pour $w\in W_F$, $X_{RL}(w)$ est l'image de $(X^R_{MRL}(w),X^L_{MRL}(w),X^{RL}_{MRL,sc}(w))$ dans $\hat{\Sigma}_{RL}$. On vérifie que X_{RL} est le produit de D et de $\hat{p}(Y_{RL})$. Plus précisement le cocycle (X_{RL},z_{sc}) est le produit de $(D,1)$ et de $(\hat{p}(Y_{RL}),z_{sc})$. Le produit $<(V^{-1}_{T^L,ad},\boldsymbol{\nu}_{RL}),(D,1)>$ se calcule comme on a calculé $<\boldsymbol{\mu}_{MR},X_{MR}>$. Il vaut $\lambda^L(a_1,a_2)^{-1}$. Notons $\mathcal{Y}_{RL}$ le tore dual de $\hat{\mathcal{Y}}_{RL}$ et $p:\Sigma_{RL}\to\mathcal{Y}_{RL}$ l'homomorphisme dual de $\hat{p}$. Par compatibilité des produits, le second produit est égal à $<(V_{T^L,ad}^{-1}, y_{RL}), (Y_{RL}, z_{sc})>$ où $y_{RL} = p(\boldsymbol{\nu}_{RL})$. D'où

$$<(V_{T^L,ad}^{-1}, \boldsymbol{\nu}_{RL}), (X_{RL}, z_{sc})>= \lambda^L(a_1,a_2)^{-1} <(V_{T^L,ad}^{-1}, y_{RL}), (Y_{RL}, z_{sc})> .$$

Revenons à l'égalité (12) où on rétablit les indices z et ρ de $\tilde{\lambda}$, utilisons (19), (20) et l'égalité précédente. On obtient

$$(21) \qquad \tilde{\lambda}_{z,\rho}(r'_1) =<(V_{T^L,ad}^{-1}, y_{RL}), (Y_{RL}, z_{sc})> .$$

On se rappelle qu'au cours de la démonstration, on a dû ajuster ρ de sorte que ad_ρ envoie l'épinglage fixé de $\hat{L}'(\tilde{\zeta})$ sur celui de $\hat{L}'(z\tilde{\zeta})$. Pour cela, on a multiplié ρ par un élément de $Z(\hat{R}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0}$. On peut maintenant oublier cette modification, car la formule (21) y est insensible. En effet, si on multiplie ρ par $\rho' \in Z(\hat{R}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0}$ cela ne change que Y_{RL}, qui est multiplié par le cocycle Y'_{RL} défini par

$$Y'_{RL}(w) = (w_G(\rho')(\rho')^{-1}, w_{T^L}(\rho')(\rho')^{-1}, w_G(\rho'_{sc})w_{T^L}(\rho'_{sc})^{-1}).$$

Or le couple $(Y'_{RL}, 1)$ est le cobord de l'élément $(\rho', \rho', 1) \in \hat{\mathcal{Y}}_{RL}$, donc disparaît par passage aux groupes de cohomologie.

Considérons l'ensemble des couples $(z,\rho) \in \mathcal{Z} \times Z(\hat{R})_*$ tels que $z(1-\hat{\theta})(\rho)^{-1} \in Z(\hat{L})^{\Gamma_F}$. C'est un groupe qui se projette sur $\mathcal{Z}$. Fixons-en un sous-ensemble fini $\underline{\mathcal{Z}}$ tel que la projection $\underline{\mathcal{Z}} \to \mathcal{Z}$ soit surjective et que ses fibres aient toutes le même nombre d'éléments. La formule (21) est valable pour tout $(z,\rho) \in \underline{\mathcal{Z}}$. La formule (10) à prouver est équivalente à

$$\sum_{(z,\rho)\in\underline{\mathcal{Z}}} S^{\tilde{L}'(z\tilde{\zeta})_1}_{\tilde{R}'(z\tilde{\zeta})_1,\lambda(z\tilde{\zeta})_1}(\boldsymbol{\delta}(z\tilde{\zeta})_1, B^{\tilde{L}}, (\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})^{\tilde{L}'(z\tilde{\zeta})_1}) = 0,$$

ou encore

$$\sum_{(z,\rho)\in\underline{\mathcal{Z}}} S^{\tilde{L}'(\tilde{\zeta})_1}_{\tilde{R}'(\tilde{\zeta})_1,\lambda(\tilde{\zeta})_1}(\iota(z,\rho)^{L,*}\circ(\iota(z)^{M,*})^{-1}(\boldsymbol{\delta}(\tilde{\zeta})_1), B^{\tilde{L}}, (\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})^{\tilde{L}'(z\tilde{\zeta})_1}) = 0.$$

Il suffit pour cela de prouver que

$$\sum_{(z,\rho)\in\underline{\mathcal{Z}}} \iota(z,\rho)^{L,*}\circ(\iota(z)^{M,*})^{-1}(\boldsymbol{\delta}(\tilde{\zeta})_1) = 0$$

et il suffit encore de prouver

$$(22) \qquad \sum_{(z,\rho)\in\underline{\mathcal{Z}}} \tilde{\lambda}_{z,\rho}(r'_1) = 0$$

pour tout r'_1 dans un voisinage du support de $\boldsymbol{\delta}(\tilde{\zeta})_1$ dans $R'(\tilde{\zeta})_1(F)$.

Supposons que l'on soit dans le cas (7), c'est-à-dire que $\hat{R}$ ne corresponde pas à un Levi de G. On choisit

$$\mathcal{Z} = (Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}} \cap (Z(\hat{L})^{\Gamma_F}(1-\hat{\theta})\circ\pi(Z(\hat{R}_{sc})^{\Gamma_F})))/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}.$$

Notons $\underline{\mathcal{Z}}_0$ l'ensemble des $(z,\rho) \in \mathcal{Z} \times \pi(Z(\hat{R}_{sc})^{\Gamma_F})$ tels que $z(1-\hat{\theta})(\rho)^{-1} \in Z(\hat{L})^{\Gamma_F}$. Appliquons les calculs précédents à un couple $(z,\rho) \in \underline{\mathcal{Z}}_0$. On peut supposer $\rho_{sc} \in Z(\hat{R}_{sc})^{\Gamma_F}$

et $\rho=\pi(\rho_{sc})$. Le terme $(1,\rho,\rho_{sc}^{-1})$ appartient à $\hat{\mathcal{Y}}_{RL}$. On peut remplacer (Y_{RL},z_{sc}) par son produit avec le cobord associé cet élément. Ce produit n'est autre que $(1,\tau_{sc})$, où $\tau_{sc}=z_{sc}(1-\hat{\theta})(\rho_{sc})^{-1}\in\hat{T}_{sc}^{L,\Gamma_F}$. On a écrit $z=\tau(1-\hat{\theta})(\rho)$. On voit que τ_{sc} a même image que τ dans $\hat{G}_{AD}$. Donc $\tau_{sc}\in Z(\hat{L}_{sc})^{\Gamma_F}$. Notons encore τ_{sc} son image dans $Z(\hat{L}_{sc})^{\Gamma_F}/Z(\hat{L}_{sc})^{\Gamma_F,0}$ et notons u^L l'image de $V_{T^L,ad}^{-1}$ dans $H^1(\Gamma_F,L_{ad})$. On obtient que $\tilde{\lambda}_{z,\rho}$ est la fonction constante de valeur $<u^L,\tau_{sc}>$, où il s'agit du produit sur

$$H^1(\Gamma_F;L_{ad})\times Z(\hat{L}_{sc})^{\Gamma_F}/Z(\hat{L}_{sc})^{\Gamma_F,0}.$$

L'homomorphisme

$$Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F,0}\to Z(\hat{L}_{sc})^{\Gamma_F}/Z(\hat{L}_{sc})^{\Gamma_F,0}$$

est surjectif. Choisissons $v\in Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F,0}$ qui s'envoie sur τ_{sc}. Notons u l'image de u^L dans $H^1(\Gamma_F,G_{AD})$. Alors la valeur de $\tilde{\lambda}_{z,\rho}$ est aussi égale à $<u,v>$, où il s'agit du produit sur

$$H^1(\Gamma_F;G_{AD})\times Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F,0}.$$

Pour construire V_{T^L}, cf. [I] 2.2, on a fixé une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$ de G et on a énoncé l'égalité $dV_{T^L}=du_{\mathcal{E}}$ dans $H^2(\Gamma_F;Z(G_{SC}))$. L'application $\sigma\mapsto u_{\mathcal{E}}(\sigma)_{ad}$ est un cocycle à valeurs dans G_{AD} dont la classe de cohomologie ne dépend pas de $\mathcal{E}$. Notons-la u_G. Parce que l'application $H^1(\Gamma_F;G_{AD})\to H^2(\Gamma_F;Z(G_{SC}))$ est injective, l'égalité rappelée ci-dessus montre que $u=u_G$. Par l'accouplement ci-dessus, u_G définit un caractère de $Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F}$. Notons $Ann(u_G)\subset Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F}$ le noyau de ce caractère et $v_{z,\rho}$ l'image de v dans le quotient $Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F}/Ann(u_G)$. On a effectué divers choix pour construire cet élément. Mais le résultat de notre calcul montre que celui-ci ne dépend pas de ces choix. On a donc une application

$$\begin{array}{ccc}\underline{\mathcal{Z}}_0 & \to & Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F}/Ann(u_G)\\ (z,\rho) & \mapsto & v_{z,\rho}.\end{array}$$

C'est un homomorphisme à valeurs dans un groupe fini. Notons J son image. Fixons un sous-ensemble $\underline{\mathcal{Z}}_1$ de l'ensemble de départ se projetant bijectivement sur J. Fixons aussi un sous-ensemble $\underline{\mathcal{Z}}_2$ se projetant bijectivement sur $\mathcal{Z}$. Notons $\underline{\mathcal{Z}}$ l'ensemble des produits $(z_1,\rho_1)(z_2,\rho_2)$, pour $(z_1,\rho_1)\in\underline{\mathcal{Z}}_1$ et $(z_2,\rho_2)\in\underline{\mathcal{Z}}_2$. On vérifie que les deux projections

$$\begin{array}{ccccc} & & \underline{\mathcal{Z}} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathcal{Z} & & & & J\end{array}$$

sont surjectives et toutes leurs fibres ont même nombre d'éléments. La somme (22) est donc proportionnelle à

$$\sum_{v\in J}<u,v>.$$

Pour démontrer la relation (22), il suffit de prouver que $J\neq\{1\}$. On utilise le lemme 2.1 de [A4] : puisque $\hat{R}$ ne correspond pas à un Levi de G, l'image dans $Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F}/Ann(u_G)$ du groupe $Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{R}_{sc})^{\Gamma_F,0}$ n'est pas réduite à l'identité (Arthur énonce ce lemme après passage à une forme quasi-déployée, mais c'est équivalent à notre assertion). Il nous suffit de prouver que, pour tout $v\in Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{R}_{sc})^{\Gamma_F,0}$, on peut trouver $(z,\rho)\in\underline{\mathcal{Z}}_0$

et effectuer les divers choix nécessaires de sorte que v soit l'élément associé ci-dessus à (z,ρ). Rappelons les deux égalités

$$Z(\hat{R}_{sc})^{\Gamma_F,0}=Z(\hat{R}_{sc})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}(1-\hat{\theta})(Z(\hat{R}_{sc})^{\Gamma_F,0}),$$

$$Z(\hat{R}_{sc})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}=Z(\hat{M}_{sc})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}Z(\hat{L}_{sc})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}.$$

Un élément $v\in Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F}\cap Z(\hat{R}_{sc})^{\Gamma_F,0}$ peut donc s'écrire $v=(\tau'_{sc})^{-1}z_{sc}(1-\hat{\theta})(\rho_{sc}^{-1})$, avec $\tau'_{sc}\in Z(\hat{L}_{sc})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$, $z_{sc}\in Z(\hat{M}_{sc})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$ et $\rho_{sc}\in Z(\hat{R}_{sc})^{\Gamma_F,0}$. Posons $z=\pi(z_{sc})$. On a $z_{sc}=\tau_{sc}(1-\hat{\theta})(\rho_{sc})$, où $\tau_{sc}=\tau'_{sc}v\in Z(\hat{L}_{sc})^{\Gamma_F}$. Donc $(z,\rho)\in\underline{\mathcal{Z}}_0$. On peut choisir les éléments ρ_{sc} et z_{sc} pour effectuer nos calculs. L'élément τ_{sc} apparaissant plus haut est celui que l'on vient de définir et on peut ensuite choisir v comme relèvement dans $Z(\hat{G}_{SC})^{\Gamma_F}$ de l'image de τ_{sc} dans $Z(\hat{L}_{sc})^{\Gamma_F}/Z(\hat{L}_{sc})^{\Gamma_F,0}$. Cela prouve l'assertion et achève de prouver l'assertion (iii) de la proposition dans le cas où $\hat{R}$ ne correspond pas à un Levi de G.

Supposons maintenant que l'on soit dans le cas (8), c'est-à-dire que $\hat{R}$ corresponde à un Levi de G donc aussi à un espace de Levi $\tilde{R}$ de $\tilde{G}$, et que le support de $\boldsymbol{\delta}$ soit contenu dans l'ensemble noté $\tilde{R}'(F)^{out}$ en (8). On prend $\mathcal{Z}$ maximal, c'est-à-dire

$$\mathcal{Z}=(Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}\cap(Z(\hat{L})^{\Gamma_F}(1-\hat{\theta})(Z(\hat{R})_*)))/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$$

et on note $\underline{\mathcal{Z}}_0$ l'ensemble des $(z,\rho)\in\mathcal{Z}\times Z(\hat{R})_*$ tels que $z(1-\hat{\theta})(\rho)^{-1}\in Z(\hat{L})^{\Gamma_F}$. Soit (z,ρ) un élément de cet ensemble. On peut supposer que $\tilde{R}$ est inclus dans $\tilde{M}$ et $\tilde{L}$. Le triplet $\mathbf{R}'=(R',\mathcal{R}',\zeta)$ est une donnée endoscopique elliptique de $\tilde{R}$ mais elle n'est pas relevante. Fixons un élément assez régulier $r_\sharp\in\tilde{R}(F)$. Bien qu'il ne corresponde à aucun élément de $\tilde{R}'_1(F)$, on peut lui associer une partie des données que l'on a associées à l ou m : le tore $T^R_\sharp$ (commutant de $R_{r_\sharp}$), le tore $T^{R'}_\sharp=T^R_\sharp/(1-\theta)(T^R_\sharp)$ (ou ici $\theta=ad_{r_\sharp}$), un élément $\nu^R_\sharp\in T^R_\sharp$ et son image $\mu^R_\sharp$ dans $T^{R'}_\sharp$, une cochaîne $V_{T^R_\sharp}$. Posons

$$\mathcal{Y}_{R\sharp L}=(T^{R'}\times T^{R'}_\sharp\times T^L)/\{(z^{R'},z^{R'}_\sharp,z^L)\in Z(G)^3;z^{R'}z^{R'}_\sharp z^L=1\}$$

(par abus d'écriture, on ne distingue pas un élément de $Z(G)$ de ses images naturelles dans différents quotients) ;

$$\mathcal{Y}^{R\sharp}=(T^{R'}\times T^{R'}_\sharp)/diag_-(Z(G)),$$

$$\mathcal{Y}^{\sharp L}=(T^{R'}_\sharp\times T^L)/diag_-(Z(G)).$$

Leurs tores duaux se décrivent de façon similaire aux précédents, par exemple $\hat{\mathcal{Y}}^{R\sharp L}$ est le groupe des $(t^{R'},t^{R'}_\sharp,t^L,t^{R\sharp}_{sc},t^{\sharp L}_{sc})\in\hat{T}^{R'}\times\hat{T}^{R'}_\sharp\times\hat{T}^{\hat{\theta}}_{sc}\times\hat{T}_{sc}$ tels que $j(t^{R\sharp}_{sc})=t^{R'}(t^{R'}_\sharp)^{-1}$, $j(t^{\sharp L}_{sc})=t^{R'}_\sharp(t^L)^{-1}$. On a un diagramme similaire à (18) :

$$\begin{array}{ccc}
H^1(\Gamma_F;T^L_{ad}\stackrel{1-\theta}{\to}\mathcal{Y}_{RL}) & \times & H^1(W_F;\hat{\mathcal{Y}}_{RL}\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{T}^L_{sc})\\
\downarrow & & \uparrow\\
H^1(\Gamma_F;T^L_{ad}\stackrel{1-\theta}{\to}\mathcal{Y}_{R\sharp L}) & \times & H^1(W_F;\hat{\mathcal{Y}}_{R\sharp L}\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{T}^L_{sc})\\
\uparrow & & \downarrow\\
H^0(\Gamma_F;\mathcal{Y}_{R\sharp})\times H^1(\Gamma_F;T^L_{ad}\stackrel{1-\theta}{\to}\mathcal{Y}_{\sharp L}) & \times & H^1(W_F;\hat{\mathcal{Y}}_{R\sharp})\times H^1(W_F;\hat{\mathcal{Y}}_{\sharp L}\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{T}^L_{sc})
\end{array}$$

Pour $w\in W_F$, posons

$$Y_{R\sharp L}(w)=(w_G(\rho)\rho^{-1},w_G(\rho)\rho^{-1},w_{T^L}(\rho)\rho^{-1},1,w_G(\rho_{sc})w_{T^L}(\rho_{sc})^{-1})\in\hat{\mathcal{Y}}_{R\sharp L}.$$

Le couple $(Y_{R\sharp L},z_{sc})$ définit un élément de $H^1(W_F;\hat{\mathcal{Y}}_{R\sharp L}\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{T}^L_{sc})$ qui s'envoie sur (Y_{RL},z_{sc}) par l'homomorphisme en haut à droite du diagramme ci-dessus. Notons $y_{R\sharp L}$ l'image de $(\mu^R,1,(\nu^L)^{-1})$ dans $\mathcal{Y}_{R\sharp L}$. Alors $(V_{T^L,ad}^{-1},y_{R\sharp L})$ est l'image de $(V_{T^L,ad}^{-1},y_{RL})$ par l'homomorphisme en haut à gauche du diagramme. Par compatibilité des produits,

$$<(V_{T^L,ad}^{-1},y_{RL}),(Y_{RL},z_{sc})>=<(V_{T^L,ad}^{-1},y_{R\sharp L}),(Y_{R\sharp L},z_{sc})>.$$

Notons $y_{R\sharp}$ l'image de $(\mu^R,(\mu^R_\sharp)^{-1})$ dans $\mathcal{Y}_{R\sharp}$ et $y_{\sharp L}$ celle de $(\mu^R_\sharp,(\nu^L)^{-1})$ dans $\mathcal{Y}_{\sharp L}$. Pour $w\in W_F$, posons

$$Y_{R\sharp}(w)=(w_G(\rho)\rho^{-1},w_G(\rho)\rho^{-1},1)\in\hat{\mathcal{Y}}_{R\sharp},$$

$$Y_{\sharp L}(w)=(w_G(\rho)\rho^{-1},w_{T^L}(\rho)\rho^{-1},w_G(\rho_{sc})w_{T^L}(\rho_{sc})^{-1})\in\hat{\mathcal{Y}}_{\sharp L}.$$

Le cocycle $(V_{T^L,ad}^{-1},y_{R\sharp L})$ est l'image de la paire de cocycles $(y_{R\sharp},(V_{T^L,ad}^{-1},y_{\sharp L}))$ par la flèche en bas à gauche du diagramme. La paire $(Y_{R\sharp},(Y_{\sharp L},z_{sc}))$ est l'image de $(Y_{R\sharp L},z_{sc})$ par la flèche en bas à droite. Par compatibilité des produits, on obtient

$$(23)\qquad <(V_{T^L,ad}^{-1},y_{R\sharp L}),(Y_{R\sharp L},z_{sc})>=<y_{R\sharp},Y_{R\sharp}><(V_{T^L,ad}^{-1},y_{\sharp L}),(Y_{\sharp L},z_{sc})>.$$

Montrons que

$$(24)\qquad <(V_{T^L,ad}^{-1},y_{\sharp L}),(Y_{\sharp L},z_{sc})>=1.$$

Posons $U_{\sharp,L}=(T^R_{\sharp,sc}\times T^L_{sc})/diag_-(Z(G_{SC}))$ et $\mathcal{X}_{\sharp L}=(T^R_\sharp\times T^L)/diag_-(Z(G))$. Notons $x_{\sharp L}$ l'image de $(\nu^R_\sharp,\mu^L)$ dans $\mathcal{X}_{\sharp L}$. Il y a un homomorphisme naturel

$$(25)\qquad H^1(\Gamma_F;U_{\sharp L}\stackrel{1-\theta}{\to}\mathcal{X}_{\sharp L})\to H^1(\Gamma_F;T^L_{ad}\stackrel{1-\theta}{\to}\mathcal{Y}_{\sharp L}).$$

Le couple $((V_{T^R_\sharp},V_{T^L}^{-1}),x_{\sharp L})$ définit un élément du premier groupe qui s'envoie sur l'élément $(V_{T^L,ad}^{-1},y_{\sharp L})$ du second. Le tore $\hat{\mathcal{X}}_{\sharp L}$ est formé des $(t^R_\sharp,t^L,t_{sc})\in\hat{T}^R_\sharp\times\hat{T}^L\times\hat{T}_{sc}$ tels que $j(t_{sc})=t^R_\sharp(t^L)^{-1}$ tandis que $\hat{U}_{\sharp L}=(\hat{T}^R_\sharp\times\hat{T}^L_{sc})/diag(Z(\hat{G}_{SC}))$. Pour $w\in W_F$, on pose

$$X_{\sharp L}(w)=(w_G(\rho)\rho^{-1},w_{T^L}(\rho)\rho^{-1},w_G(\rho_{sc})w_{T^L}(\rho_{sc})^{-1})\in\hat{\mathcal{X}}_{\sharp L}.$$

Alors $(X_{\sharp L},(1,z_{sc}))$ définit un élément de $H^1(W_F;\hat{\mathcal{X}}_{\sharp L}\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{U}_{\sharp L})$. C'est l'image de $(Y_{\sharp L},z_{sc})$ par l'homomorphisme dual de (25). D'où l'égalité

$$<(V_{T^L,ad}^{-1},y_{\sharp L}),(Y_{\sharp L},z_{sc})>=<((V_{T^R_\sharp},V_{T^L}^{-1}),x_{\sharp L}),(X_{\sharp L},(1,z_{sc}))>.$$

Le triplet $(\rho,\rho,1)$ appartient à $\hat{\mathcal{X}}_{\sharp L}$. On peut multiplier $(X_{\sharp L},(1,z_{sc}))$ par le cobord de cet élément. On obtient un cocycle qui est l'image par l'homomorphisme naturel

$$\hat{U}_{\sharp L}^{\Gamma_F}=H^0(W_F;\hat{U}_{\sharp L})\to H^1(W_F;\hat{\mathcal{X}}_{\sharp L}\stackrel{1-\hat{\theta}}{\to}\hat{U}_{\sharp L})$$

de l'élément $u_{\sharp L}=((1-\hat{\theta})(\rho_{sc})^{-1},z_{sc}(1-\hat{\theta})(\rho_{sc})^{-1})$ de $\hat{U}_{\sharp L}^{\Gamma_F}$. Donc

$$<((V_{T^R_\sharp},V_{T^L}^{-1}),x_{\sharp L}),(X_{\sharp L},(1,z_{sc}))>=<(V_{T^R_\sharp},V_{T^L}^{-1}),u_{\sharp L}>.$$

On sait que $\hat{U}_{\sharp L}^{\Gamma_F,0}$ est contenu dans le noyau de l'accouplement intervenant ici. On va montrer que $u_{\sharp L}$ appartient à ce sous-groupe, ce qui prouvera (24). On écrit

$$u_{\sharp L}=(z_{sc}^{-1},1)(\tau_{sc},\tau_{sc})$$

où $\tau_{sc}=z_{sc}(1-\hat{\theta})(\rho_{sc})^{-1}$. On a supposé $z_{sc}\in Z(\hat{M}_{sc})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$, a fortiori $z_{sc}\in Z(\hat{R}_{sc})^{\Gamma_F,0}$. Le couple $(z_{sc},1)$ (ou plutôt son image dans $\hat{U}_{\sharp L}$) appartient donc à $\hat{U}_{\sharp L}^{\Gamma_F,0}$. L'élément τ_{sc} a même image que τ dans $\hat{G}_{AD}$, cf. (9) pour la définition de τ. D'après la définition de $\hat{U}_{\sharp L}$ (qui est un quotient par $Z(\hat{G}_{SC})$), on peut aussi bien remplacer τ_{sc} par un élément quelconque de $\hat{G}_{SC}$ qui a même image que τ dans $\hat{G}_{AD}$. Puisque $\tau\in Z(\hat{L})^{\Gamma_F}$, on peut supposer $\tau_{sc}\in Z(\hat{L}_{sc})^{\Gamma_F,0}$. Mais alors $(\tau_{sc},\tau_{sc})\in\hat{U}_{\sharp L}^{\Gamma_F,0}$. Cela achève la preuve de (24).

Introduisons le groupe R_0 quasi-déployé et dual de $\hat{R}^{\hat{\theta},0}$, c'est-à-dire l'analogue du groupe G_0 de [I] 1.12 quand on remplace $\tilde{G}$ par $\tilde{R}$. Les tores $T^{R'}$ et $T^{R'}_{\sharp}$ se réalisent naturellement comme sous-tores de R_0. Pour $\rho\in Z(\hat{R})_*$, le cocycle $w\mapsto w_G(\rho)\rho^{-1}$ est à valeurs dans $Z(\hat{R}_0)$ et définit un caractère de $R_0(F)$, cf. [I] 1.13, que l'on note ici χ_ρ. Ce caractère se factorise par $R_{0,ab}(F)$ et est alors trivial sur $N^R(R_{ab}(F))$. Par un calcul déjà fait plusieurs fois, on a

$$<y_{R\sharp},Y_{R\sharp}>=\chi_\rho(\mu^R(\mu^R_\sharp)^{-1}).$$

Notons $(R_{0,ab}(F)/N^R(R_{ab}(F)))^\vee$ le groupe dual du groupe fini $R_{0,ab}(F)/N^R(R_{ab}(F))$. On obtient un homomorphisme

$$(26)\qquad \begin{array}{ccc}\underline{\mathcal{Z}}_0&\to&(R_{0,ab}(F)/N^R(R_{ab}(F)))^\vee\\ (z,\rho)&\mapsto&\chi_\rho.\end{array}$$

Notons J son image. Comme dans la preuve du cas où (7) est vérifiée, on peut définir $\underline{\mathcal{Z}}$ de sorte que la somme (22) soit proportionnelle à

$$\sum_{\chi\in J}\chi(\mu^R(\mu^R_\sharp)^{-1}).$$

Il reste à montrer que cette somme est nulle sous l'hypothèse de (22).

Comme en [I] 1.13, on déduit de $\chi\in(R_{0,ab}(F)/N^R(R_{ab}(F)))^\vee$ une application $\tilde{\chi}$ sur $\tilde{R}_{0,ab}(F)$ qui vaut 1 sur l'image de $\tilde{R}_{ab}(F)$ par $N^{\tilde{R}}$ et qui vérifie $\tilde{\chi}(x\gamma)=\chi(x)\tilde{\chi}(\gamma)$ pour tous $x\in R_{0,ab}(F)$ et $\gamma\in\tilde{R}_{0,ab}(F)$. En reprenant les constructions, on vérifie que l'on a l'égalité $N^{\tilde{R}',\tilde{R}}(r')=\mu^R(\mu^R_\sharp)^{-1}N^{\tilde{R}}(r_\sharp)$. Donc

$$\chi(\mu^R(\mu^R_\sharp)^{-1})=\tilde{\chi}(N^{\tilde{R}',\tilde{R}}(r')).$$

Reportons-nous aux hypothèses de (22) et (8) : on peut supposer que r' appartient à l'ensemble $\tilde{R}'(F)^{out}$ défini en (8). D'après sa définition, on a

$$\sum_{\chi\in(R_{0,ab}(F)/N^R(R_{ab}(F)))^\vee}\tilde{\chi}(N^{\tilde{R}',\tilde{R}}(r'))=0.$$

Pour achever de prouver (22), il suffit de prouver que $J=(R_{0,ab}(F)/N^R(R_{ab}(F)))^\vee$, autrement dit que l'homomorphisme (26) est surjectif. Puisque $(R_{0,ab}(F)/N^R(R_{ab}(F)))^\vee$ est l'image par $\rho\mapsto\chi_\rho$ de $Z(\hat{R})_*/(Z(\hat{R})\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})Z(\hat{R})^{\Gamma_F}$, il suffit de prouver que l'homomorphisme

$$\begin{array}{ccc}\underline{\mathcal{Z}}_0&\to&Z(\hat{R})_*/(Z(\hat{R})\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})Z(\hat{R})^{\Gamma_F}\\ (z,\rho)&\mapsto&\rho(Z(\hat{R})\cap\hat{T}^{\hat{\theta},0})Z(\hat{R})^{\Gamma_F}\end{array}$$

est surjectif. On a les relations

$$(1-\hat{\theta})(Z(\hat{R})_*)\subset Z(\hat{R})^\Gamma=Z(\hat{G})^\Gamma Z(\hat{R})^{\Gamma,\hat{\theta},0}(1-\hat{\theta})(Z(\hat{R})^\Gamma)$$

$$= Z(\hat{G})^{\Gamma} Z(\hat{M})^{\Gamma,\hat{\theta},0} Z(\hat{L})^{\Gamma,\hat{\theta},0}(1-\hat{\theta})(Z(\hat{R})^{\Gamma}) \subset Z(\hat{M})^{\Gamma,\hat{\theta}} Z(\hat{L})^{\Gamma}(1-\hat{\theta})(Z(\hat{R})^{\Gamma}).$$

Soit $\rho \in Z(\hat{R})_*$. Ecrivons $(1-\hat{\theta})(\rho) = z\tau^{-1}(1-\hat{\theta})((\rho')^{-1})$, avec $z \in Z(\hat{M})^{\Gamma,\hat{\theta}}$, $\tau \in Z(\hat{L})^{\Gamma}$, $\rho' \in Z(\hat{R})^{\Gamma}$. Alors $z = \tau(1-\hat{\theta})(\rho\rho')$ appartient à $\mathcal{Z}$, $(z,\rho\rho')$ appartient à $\underline{\mathcal{Z}}_0$ et l'image par l'homomorphisme ci-dessus est $\rho(Z(\hat{R}) \cap \hat{T}^{\hat{\theta},0})Z(\hat{R})^{\Gamma_F}$. Cela achève enfin la preuve. $\square$

Variante. Supposons $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Fixons un système de fonctions B comme en 1.9. On a des assertions analogues à (i) et (iii) pour les intégrales $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'},B,\mathbf{f})$. En fait, sur notre corps F non-archimédien, les hypothèses de (iii) ne sont jamais vérifiées car, dans la situation quasi-déployée et à torsion intérieure, un groupe de Levi R' de M' est toujours relevant.

Variante. Supposons $G = \tilde{G}$ et $\mathbf{a} = 1$. Fixons une fonction B comme en 1.8. On a des assertions analogues à (i) et (iii) pour les intégrales $I_M^{G,\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'},B,\mathbf{f})$, en supposant $\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'}$ à support unipotent (puisque l'on n'a défini ces termes que sous cette hypothèse).

1.15 Intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes endoscopiques

Soient $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ un triplet quelconque et $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$.

Lemme. *Pour tout* $\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})$, *soit* $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'} \in D_{géom}^{st}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))^*$. *Supposons*

$$\sum_{\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})} transfert(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'}) = 0.$$

Alors

$$\sum_{\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})} I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'},\mathbf{f}) = 0$$

pour tout $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F),\omega) \otimes Mes(G(F))$.

Preuve. Par linéarité, on peut fixer une classe de conjugaison géométrique semi-simple $\mathcal{O}$ dans $\tilde{G}(F)$ et supposer que, pour tout $\mathbf{M}'$, $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'}$ appartient à $D_{géom}^{st}(\mathcal{O}_{\tilde{M}'}) \otimes Mes(M'(F))^*$, où $\mathcal{O}_{\tilde{M}'}$ est la réunion des classes de conjugaison géométriques dans $\tilde{M}'(F)$ correspondant à une classe dans $\mathcal{O} \cap \tilde{M}(F)$. D'après [I] proposition 5.7, il suffit de prouver la conclusion de l'énoncé quand la famille $(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'})_{\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})}$ appartient à l'un des sous-espaces décrits par chacune des conditions (3), (4), (5) de cette référence. Dans le cas (3), l'assertion résulte du (iii) de la proposition 1.14. Dans le cas (4), elle résulte du corollaire 1.13. Dans le cas (5), elle résulte du (i) de la proposition 1.14. $\square$

Soit $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{M}(F),\omega) \otimes Mes(M(F))^*$. Grâce à la proposition 5.7 de [I], il existe une famille $(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'})_{\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})}$, avec $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'} \in D_{géom}^{st}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))^*$ pour tout $\mathbf{M}'$, de sorte que

$$\boldsymbol{\gamma} = \sum_{\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})} transfert(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'}).$$

Pour $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F),\omega) \otimes Mes(G(F))$, on pose

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = \sum_{\mathbf{M}' \in \mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})} I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'},\mathbf{f}).$$

Cette définition est loisible puisque le lemme ci-dessus nous dit que le membre de droite ne dépend pas de la famille $(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'})_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})}$ choisie.

Soit $\tilde{R}$ un espace de Levi de $\tilde{M}$ et soit $\boldsymbol{\gamma}\in D_{g\acute{e}om}(\tilde{R}(F),\omega)\otimes Mes(R(F))^*$. Alors on a l'égalité

$$(1)\qquad I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}},\mathbf{f})=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})}d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L})I_{\tilde{R}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega}).$$

Preuve. Par linéarité, on peut supposer qu'il existe $\mathbf{R}'\in\mathcal{E}(\tilde{R},\mathbf{a})$ et $\boldsymbol{\delta}\in D_{g\acute{e}om}^{st}(\mathbf{R}')\otimes Mes(R'(F))^*$ tels que $\boldsymbol{\gamma}$ soit le transfert de $\boldsymbol{\delta}$. Ecrivons $\mathbf{R}'=(R',\mathcal{R}',\tilde{s})$. De $\tilde{M}$ se déduit une donnée endoscopique $\mathbf{M}'=(M',\mathcal{M}',\tilde{s})$. Quitte à multiplier $\tilde{s}$ par un élément de $Z(\hat{R})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$, on peut supposer $\mathbf{M}'$ elliptique. Par compatibilité du transfert à l'induction, $\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}}$ est le transfert de $\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'}$. Par définition, on a alors

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}},\mathbf{f})=I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'},\mathbf{f}).$$

On applique la proposition 1.14(i) :

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}},\mathbf{f})=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})}d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L})I_{\tilde{R}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{R}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega}).$$

Toujours par définition, on a pour tout $\tilde{L}$ l'égalité

$$I_{\tilde{R}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{R}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega})=I_{\tilde{R}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}_{\tilde{L},\omega}).$$

L'égalité (1) s'ensuit. $\square$

Variante. Supposons que $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ soit quasi-déployé et à torsion intérieure. Fixons un système de fonctions B comme en 1.9. Pour $\boldsymbol{\gamma}\in D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F))^*$ et $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$, on définit $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},B,\mathbf{f})$ de la même façon que ci-dessus. Ce terme vérifie l'analogue de la relation (1).

Variante. Supposons $G=\tilde{G}$ et $\mathbf{a}=1$. Soit B une fonction comme en 1.8. Pour $\boldsymbol{\gamma}\in D_{unip}(M(F))\otimes Mes(M(F))^*$ et $\mathbf{f}\in I(G(F))\otimes Mes(G(F))$, on définit $I_M^{G,\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},B,\mathbf{f})$ de la même façon que ci-dessus. Ce terme vérifie l'analogue de la relation (1).

1.16 Le théorème principal

Soient $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ un triplet quelconque et $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$.

Théorème (à prouver). *(i) Soient $\boldsymbol{\gamma}\in D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ et $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$. Alors on a l'égalité*

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$$

.

(ii) Supposons que $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ soit quasi-déployé et à torsion intérieure. Fixons un système de fonctions B comme en 1.9.. Soient $\boldsymbol{\gamma}\in D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F))^*$ et $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$. Alors on a l'égalité

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},B,\mathbf{f})=I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},B,\mathbf{f})$$

.

Remarque. Quand G est quasi-déployé, $\tilde{G} = G$, $\mathbf{a} = 1$ et B est le système de fonctions constant de valeur 1, le (ii) a été prouvé par Arthur pour $\boldsymbol{\gamma}$ à support fortement $\tilde{G}$-régulier. Nous prouverons dans l'article suivant que l'assertion (ii) dans notre situation un peu plus générale se déduit du résultat d'Arthur.

2 Germes de Shalika

2.1 Germes de Shalika ordinaires

Soit $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ un triplet quelconque comme en 1.1. Soit $\eta \in \tilde{G}_{ss}(F)$. Fixons un ensemble de représentants $\{u_i; i, ..., n\}$ des classes de conjugaison par $Z_G(\eta; F)$ dans l'ensemble des éléments unipotents $u \in G_\eta(F)$ tels que ω est trivial sur $Z_G(\eta u; F)$. On fixe des mesures sur tous les groupes intervenant. La théorie des germes de Shalika nous dit que, pour tout $i = 1, ..., n$, il existe un unique germe $g_i(., \omega)$ de fonction définie au voisinage de η dans $\tilde{G}(F)$, de sorte que, pour tout $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ et tout $\gamma \in \tilde{G}(F)$, on ait l'égalité

$$I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = \sum_{i=1,...,n} g_i(\gamma, \omega) I^{\tilde{G}}(\eta u_i, \omega, f)$$

pourvu que γ soit assez proche de η.

Comme on vient de le dire, ces germes sont définis au voisinage de η dans $\tilde{G}(F)$, mais leurs restrictions à $\tilde{G}_{reg}(F)$ sont d'un intérêt particulier. On sait que les restrictions des $g_i(., \omega)$ à $\tilde{G}_{reg}(F)$ sont homogènes, c'est-à-dire qu'il existe $d_i \in \mathbb{N}$ tel que

$$g_i(exp(\lambda^2 X)\eta, \omega) = |\lambda|_F^{d_i} g_i(exp(X)\eta, \omega)$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}_{\eta,reg}(F)$ assez proche de 0 et tout $\lambda \in F^\times$ de valuation positive ou nulle. On sait aussi que les restrictions de ces germes à $\tilde{G}_{reg}(F)$ séparent les orbites u_i. C'est-à-dire que l'on peut trouver des familles $(\gamma_i)_{i=1,...,n}$ formées d'éléments de $\tilde{G}_{reg}(F)$ aussi proches de η que l'on veut, de sorte que la matrice $(g_i(\gamma_j, \omega))_{i,j=1,...,n}$ soit inversible. On peut raffiner ce résultat : fixons un sous-ensemble $\tilde{V}$ ouvert et dense dans $\tilde{G}_{reg}(F)$; alors on peut imposer aux γ_i d'appartenir à $\tilde{V}$.

Reformulons les définitions de façon plus abstraite. Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison (par $G(F)$) semi-simple. Considérons l'ensemble $\mathcal{U}(\mathcal{O})$ des voisinages ouverts et fermés $\tilde{U}$ de $\mathcal{O}$ qui sont invariants par conjugaison et tels que, pour tout $\gamma \in \tilde{G}(F)$, γ appartient à $\tilde{U}$ si et seulement si la partie semi-simple γ_{ss} appartient à $\tilde{U}$. Pour un tel voisinage $\tilde{U}$, on note $D_{géom}(\tilde{U}, \omega)$ le sous-espace des éléments de $D_{géom}(\tilde{G}(F), \omega)$ à support dans $\tilde{U}$. Pour une propriété dépendant d'un élément $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{G}(F), \omega)$ nous dirons qu'elle est vérifiée "pour $\boldsymbol{\gamma}$ assez proche de $\mathcal{O}$" si et seulement s'il existe $\tilde{U} \in \mathcal{U}(\mathcal{O})$ tel que la propriété soit vérifiée pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{U}, \omega)$. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Considérons l'ensemble des couples $(\tilde{U}, g)$, où $\tilde{U} \in \mathcal{U}(\mathcal{O})$ et $g : D_{géom}(\tilde{U}) \otimes Mes(G(F))^* \to E$ est une application linéaire. Disons que deux couples $(\tilde{U}, g)$ et $(\tilde{U}', g')$ sont équivalents si et seulement s'il existe $\tilde{U}'' \in \mathcal{U}(\mathcal{O})$, avec $\tilde{U}'' \subset \tilde{U} \cap \tilde{U}'$, tel que les restrictions de g et g' à $D_{géom}(\tilde{U}'') \otimes Mes(G(F))^*$ coïncident. Une classe d'équivalence sera appelée un germe d'application linéaire sur $D_{géom}(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))^*$ au voisinage de $\mathcal{O}$, à valeurs dans

E. Un tel germe sera noté simplement g et sera considéré comme une application linéaire $D_{géom}(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))^* \to E$, dont la valeur n'est bien définie que pour des éléments de $D_{géom}(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))^*$ assez proches de $\mathcal{O}$.

On peut reformuler la définition des germes de Shalika en disant qu'il existe un unique germe d'application linéaire $g_{\mathcal{O}}$ sur $D_{géom}(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))^*$ au voisinage de $\mathcal{O}$, à valeurs dans $D_{géom}(\mathcal{O},\omega) \otimes Mes(G(F))^*$, de sorte que, pour tout $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F),\omega) \otimes Mes(G(F))$ et tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{G}(F),\omega) \otimes Mes(G(F))^*$, on ait l'égalité

$$I^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = I^{\tilde{G}}(g_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma}),\mathbf{f})$$

pourvu que $\boldsymbol{\gamma}$ soit assez proche de $\mathcal{O}$. La propriété de séparation des orbites se traduit de la façon suivante. Soit $\tilde{V}$ un sous-ensemble ouvert et dense dans $\tilde{G}_{reg}(F)$, invariant par conjugaison par $G(F)$. Alors

(1) pour tout $\boldsymbol{\tau} \in D_{géom}(\mathcal{O},\omega) \otimes Mes(G(F))^*$, il existe $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{G}(F),\omega) \otimes Mes(G(F))^*$, à support dans $\tilde{V}$ et aussi proche que l'on veut de $\mathcal{O}$, de sorte que $g_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\tau}$.

2.2 Germes de Shalika et stabilité

Dans le paragraphe précédent, on a défini la notion de germe d'application linéaire sur $D_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))^*$ au voisinage de $\mathcal{O}$, à valeurs dans un espace vectoriel complexe E, quand $\mathcal{O}$ était une classe de conjugaison semi-simple par $G(F)$. La définition se généralise au cas où $\mathcal{O}$ est une réunion finie de telles classes. Dans ce cas, décomposons $\mathcal{O}$ en union finie $\cup_{i=1,...,n}\mathcal{O}_i$ de classes de conjugaison. Pour tout $i = 1,...,n$ considérons le germe de Shalika $g_{\mathcal{O}_i}$ relatif à $\mathcal{O}_i$. On peut fixer pour tout i un voisinage $\tilde{U}_i \in \mathcal{U}(\mathcal{O}_i)$ de sorte que $g_{\mathcal{O}_i}$ soit défini sur $D_{géom}(\tilde{U}_i,\omega) \otimes Mes(G(F))^*$. On peut supposer les $\tilde{U}_i$ deux à deux disjoints. Posons $\tilde{U} = \cup_{i=1,...,n}\tilde{U}_i$. Alors $g_{\mathcal{O}} = \oplus_{i=1,...,n}g_{\mathcal{O}_i}$ est une application linéaire à valeurs dans $D_{géom}(\mathcal{O},\omega) \otimes Mes(G(F))^*$, définie sur

$$\oplus_{i=1,...,n}D_{géom}(\tilde{U}_i,\omega) \otimes Mes(G(F))^* = D_{géom}(\tilde{U},\omega) \otimes Mes(G(F))^*.$$

Le germe de cette application est uniquement défini.

Supposons maintenant $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Soit $\mathcal{O} \subset \tilde{G}(F)$ une classe de conjugaison stable semi-simple. Pour étudier les distributions stables, il convient d'adapter les définitions en remplaçant l'ensemble de voisinages $\mathcal{U}(\mathcal{O})$ par son sous-ensemble $\mathcal{U}^{st}(\mathcal{O})$ des $\tilde{U}$ qui vérifient la condition : pour $\gamma,\gamma' \in \tilde{G}_{reg}(F)$ stablement conjugués, γ appartient à $\tilde{U}$ si et seulement si $\gamma' \in \tilde{U}$. Cela ne crée pas de difficultés car tout élément de $\mathcal{U}(\mathcal{O})$ contient un voisinage vérifiant cette condition ([I] 4.6). On dispose du germe $g_{\mathcal{O}}$ ci-dessus.Fixons un sous-ensemble $\tilde{V} \subset \tilde{G}_{reg}(F)$, ouvert et dense et invariant par conjugaison stable.

Lemme. *Pour $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))^*$, $g_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta})$ appartient à $D^{st}_{géom}(\mathcal{O})\otimes Mes(G(F))^*$ pourvu que $\boldsymbol{\delta}$ soit assez proche de $\mathcal{O}$. Pour tout $\boldsymbol{\tau} \in D^{st}_{géom}(\mathcal{O}) \otimes Mes(G(F))^*$, il existe $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))^*$, à support dans $\tilde{V}$ et aussi proche que l'on veut de $\mathcal{O}$, de sorte que $g_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{\tau}$.*

Preuve. On oublie les espaces de mesures. L'espace $D_{géom}(\mathcal{O})$ est le dual de $I(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},loc}$, cf. [I] 5.1, tandis que $D^{st}_{géom}(\mathcal{O})$ est le dual de son quotient $SI(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},loc}$. On peut donc fixer une base $(\boldsymbol{\tau}_i)_{i=1,...,n}$ de $D_{géom}(\mathcal{O})$, un entier $s \in \{0,...,n\}$ et une famille $(f_i)_{i=1,...,n}$ d'éléments de $I(\tilde{G}(F))$ de sorte que

- $(\boldsymbol{\tau}_i)_{i=1,...,s}$ est une base de $D^{st}_{géom}(\mathcal{O})$ et $(\boldsymbol{\tau}_i)_{i=s+1,...,n}$ est une base d'un supplémentaire de $D^{st}_{géom}(\mathcal{O})$ dans $D_{géom}(\mathcal{O})$;

- l'image de $(f_i)_{i=1,...,n}$ dans $I(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},loc}$ est une base de cet espace et l'image de $(f_i)_{i=s+1,...,n}$ est une base du noyau de la projection $I(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},loc} \to SI(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},loc}$;

- $I^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\tau}_i, f_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

Pour $i = s+1,...,n$, la condition que l'image de f_i appartient au noyau de la projection dans $SI(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},loc}$ signifie que $S^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, f_i) = 0$ pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\tilde{G}(F))$ assez proche de $\mathcal{O}$. Fixons un voisinage $\tilde{U} \in \mathcal{U}^{st}(\mathcal{O})$ de sorte que

- $g_{\mathcal{O}}$ soit défini sur $D_{géom}(\tilde{U})$;

- pour tout $i = s+1,...,n$, on ait $S(\boldsymbol{\delta}, f_i) = 0$ pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\tilde{U})$ (cet ensemble étant bien sûr $D^{st}_{géom}(\tilde{G}(F)) \cap D_{géom}(\tilde{U})$) ;

- pour tout $i = 1,...,n$, on ait l'égalité

$$(1) \qquad I^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, f_i) = I^{\tilde{G}}(g_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma}), f_i)$$

pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{U})$.

Soient $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\tilde{U})$ et $i = s+1,...,n$. On a $I^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, f_i) = S^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, f_i) = 0$. L'égalité ci-dessus nous dit que $I^{\tilde{G}}(g_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta}), f_i) = 0$. La composante de $g_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta})$ sur l'élément de base $\boldsymbol{\tau}_i$ est donc nulle. C'est la condition pour que $g_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta})$ appartienne à $D^{st}_{géom}(\mathcal{O})$, ce qui prouve la première assertion de l'énoncé.

La famille $(f_i)_{i=1,...,s}$ est linéairement indépendante du noyau de la projection $I(\tilde{G}(F)) \to SI(\tilde{G}(F))_{\mathcal{O},loc}$. Cela entraîne que l'on peut trouver une famille $(\boldsymbol{\delta}_i)_{i=1,...,s}$ d'éléments de $D^{st}_{géom,reg}(\tilde{U})$ de sorte que la matrice $(S^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}_i, f_j))_{i,j=1,...,s}$ soit inversible. On peut remplacer les $\boldsymbol{\delta}_i$ par des éléments assez proches et à support dans $\tilde{V}$. En prenant des combinaisons linéaires convenables de ces éléments, on obtient une nouvelle famille $(\boldsymbol{\delta}_i)_{i=1,...,s}$ d'éléments de $D^{st}_{géom,reg}(\tilde{U})$, à supports dans $\tilde{V}$, de sorte que, pour $i, j = 1,...,s$,

$$S^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}_i, f_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

D'après ce qui précède, cette égalité vaut même pour $i = 1,...,s$ et $j = 1,...,n$. Appliquons la relation (1) pour $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\delta}_i$. On obtient que

$$I^{\tilde{G}}(g_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta}_i), f_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

pour $j = 1,...,n$. Donc $g_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta}_i) = \boldsymbol{\tau}_i$. Cela démontre la seconde assertion. $\square$

De nouveau, les définitions et résultats se généralisent au cas où $\mathcal{O}$ est une réunion finie de classes de conjugaison stable semi-simples.

2.3 Intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes

Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. On note $D_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(F), \omega)$ le sous-espace des éléments de $D_{géom}(\tilde{M}(F), \omega)$ dont le support est formé d'éléments de $\tilde{M}(F)$ qui sont

$\tilde{G}$-équisinguliers. Soit $\mathcal{O} \subset \tilde{M}(F)$ une classe de conjugaison semi-simple par $M(F)$. On note $\mathcal{O}^{\tilde{G}} \subset \tilde{G}(F)$ l'unique classe de conjugaison par $G(F)$ qui contient $\mathcal{O}$.

Proposition. *Il existe un unique germe d'application linéaire $g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{G}}$ sur $D_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ au voisinage de $\mathcal{O}$, à valeurs dans $D_{géom}(\mathcal{O}^{\tilde{G}},\omega)\otimes Mes(G(F))^*$, de sorte que pour tout $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$ et tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$, on ait l'égalité*

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}),\mathbf{f})$$

pourvu que $\boldsymbol{\gamma}$ soit assez proche de $\mathcal{O}$.

C'est une reformulation de [A3] 2.5 (voir aussi [A1] proposition 9.1). En fait, ces germes se définissent aussi bien sans imposer à $\boldsymbol{\gamma}$ la restriction d'équisingularité de son support. Mais nous ne les utiliserons que pour les $\boldsymbol{\gamma}$ indiqués et il est plus simple de se limiter dès le début à de tels éléments.

En particulier, si $\tilde{M} = \tilde{G}$, le germe $g_{\tilde{G},\mathcal{O}}^{\tilde{G}}$ est le germe de Shalika ordinaire noté $g_{\mathcal{O}}$ dans les paragraphes précédents. On a une propriété supplémentaire :

(1) supposons que $\mathcal{O}$ soit formé d'éléments $\tilde{G}$-équisinguliers de $\tilde{M}(F)$; alors $g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{G}} = 0$ si $\tilde{G} \neq \tilde{M}$.

C'est [A1] remarque page 270.

Variante. Supposons $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Fixons un système de fonctions B comme en 1.9. Il y a une proposition similaire à la précédente, où l'on remplace les intégrales orbitales $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ par leurs variantes $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},B,\mathbf{f})$. Cette variante se déduit de la proposition précédente en utilisant 1.9(5). On note $g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma},B)$ les germes dans cette situation.

Variante. Supposons $G = \tilde{G}$ et $\mathbf{a} = 1$. Fixons une fonction B comme en 1.8. Supposons $\mathcal{O} = \{1\}$. On a défini les intégrales orbitales $I_M^G(\boldsymbol{\gamma},B,\mathbf{f})$ pour $\boldsymbol{\gamma}$ à support unipotent. On les définit aussi pour $\boldsymbol{\gamma}$ à support G-équisingulier par la simple égalité $I_M^G(\boldsymbol{\gamma},B,\mathbf{f}) = I_M^G(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$. Alors ces intégrales vérifient une proposition similaire à la précédente. On note $g_{M,unip}^L(\boldsymbol{\gamma},B)$ les germes dans cette situation.

Comme précédemment, les définitions et résultats se généralisent au cas où $\mathcal{O}$ est une réunion finie de classes de conjugaison semi-simples.

2.4 Définition des germes stables

On suppose $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. On fixe un système de fonctions B comme en 1.9. Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. On note $D_{géom,\tilde{G}-équi}^{st}(\tilde{M}(F))$ l'intersection de $D_{géom}^{st}(\tilde{M}(F))$ et de $D_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(F))$. Soit $\mathcal{O} \subset \tilde{M}(F)$ une classe de conjugaison stable d'éléments semi-simples dans $\tilde{M}(F)$. On note $\mathcal{O}^{\tilde{G}} \subset \tilde{G}(F)$ l'unique classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}(F)$ contenant $\mathcal{O}$. On va définir un germe d'application linéaire $Sg_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{G}}(B)$ sur $D_{géom,\tilde{G}-équi}^{st}(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F))^*$ au voisinage de $\mathcal{O}$, à valeurs dans $D_{géom}(\mathcal{O}^{\tilde{G}})\otimes Mes(G(F))^*$. La proposition ci-dessous affirme qu'il prend en fait ses valeurs dans $D^{st}_{géom}(\mathcal{O}^{\tilde{G}})\otimes Mes(G(F))^*$. Comme toujours, on admet cette propriété par récurrence pour les triplets $(G',\tilde{G}',\mathbf{a}')$ quasi-déployés et à torsion intérieure tels que $dim(G'_{SC})<dim(G_{SC})$. On peut alors poser, pour $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(F)\otimes Mes(M(F))^*$,

$$(1)\qquad Sg^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta},B)=g^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta},B)-\sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F};s\neq 1}i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))transfert(Sg^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta},B)).$$

On s'est dispensé du formalisme nécessaire pour attacher des germes à des données $\mathbf{G}'(s)$ plutôt qu'à des espaces $\tilde{G}'(s)$. Modulo cet oubli, tous les termes $Sg^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta},B)$ sont définis par récurrence et sont des distributions stables pour $\mathbf{G}'(s)$. Remarquons que le support de la distribution $\boldsymbol{\delta}$ est formé d'éléments $\tilde{G}'(s)$-équisinguliers : si $\gamma\in\tilde{M}(F)$, le système de racines de $G'(s)_\gamma$ est contenu dans celui de G_γ, donc dans celui de M_γ si γ est $\tilde{G}$-équisingulier.

Proposition (à prouver). *Pour tout $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F))^*$ assez proche de $\mathcal{O}$, le terme $Sg^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta},B)$ appartient à $D^{st}_{géom}(\mathcal{O}^{\tilde{G}})\otimes Mes(G(F))^*$.*

Par récurence, la relation 2.3(1) et la définition (1) ci-dessus entraînent
(2) si $\mathcal{O}$ est formée d'éléments $\tilde{G}$-équisinguliers de $\tilde{M}(F)$,

$$Sg^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(B)=\begin{cases}0, & \text{si } \tilde{M}\neq\tilde{G},\\ g^{\tilde{M}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(B)=g^{\tilde{M}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}, & \text{si } \tilde{M}=\tilde{G}.\end{cases}$$

2.5 Intégrales orbitales pondérées invariantes stables

On conserve les hypothèses du paragraphe précédent.

Proposition. *(i) Pour tout $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$ et tout $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F))^*$, on a l'égalité*

$$S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},B,\mathbf{f})=I^{\tilde{G}}(Sg^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta},B),B,\mathbf{f})+\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{G}}S^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(Sg^{\tilde{L}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta},B),B,\mathbf{f})$$

pourvu que $\boldsymbol{\delta}$ soit assez proche de $\mathcal{O}$.

(ii) Supposons que $Sg^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta},B)$ appartienne à $D^{st}_{géom}(\mathcal{O}^{\tilde{G}})\otimes Mes(G(F))^*$. La formule ci-dessus devient

$$S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},B,\mathbf{f})=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}S^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(Sg^{\tilde{L}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta},B),B,\mathbf{f})$$

pourvu que $\boldsymbol{\delta}$ soit assez proche de $\mathcal{O}$.

Preuve. Pour simplifier les notations, on oublie les espaces de mesures. On note X la différence entre $S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},B,\mathbf{f})$ et le membre de droite de l'égalité du (i) de l'énoncé. On utilise la formule de définition

$$(1)\qquad I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},B,\mathbf{f})=S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},B,\mathbf{f})+\sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F};s\neq 1}i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))S^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\delta},B,\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}).$$

On développe le membre de gauche par la proposition 2.3. On écrit le premier terme du membre de droite comme X plus le membre de droite de la formule du (i) de l'énoncé. On développe les autres termes en utilisant la formule du (ii) de l'énoncé, que l'on peut utiliser par récurrence. Toutes ces formules sont des sommes sur des ensembles d'espaces de Levi. Rappelons que, pour $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$, un espace de Levi $\tilde{L}'_s \in \mathcal{L}^{\tilde{G}'(s)}(\tilde{M})$ détermine un espace de Levi $\tilde{L}$ de $\tilde{G}$ par la formule $\mathcal{A}_{\tilde{L}} = \mathcal{A}_{L'_s}$. On a tacitement réalisé ${}^LM$ comme un sous-groupe de Levi standard de ${}^LG$. En posant $\mathcal{L}'_s = \hat{L}'_s \rtimes W_F \subset {}^LG$, le triplet $(L'_s, \mathcal{L}'_s, s)$ est égal à la donnée endoscopique $\mathbf{L}'(s)$ de $(L, \tilde{L})$. On isole dans chaque formule l'espace de Levi maximal. Ainsi, pourvu que $\boldsymbol{\delta}$ soit assez proche de $\mathcal{O}$, $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f})$ est la somme de

(2) $I^{\tilde{G}}(g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B), \mathbf{f})$

et de

(3) $\sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}), \tilde{L} \neq \tilde{G}} I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta}, B), B, \mathbf{f})$.

Le membre de droite de (1) est égal à la somme de X, de

$$(4) \qquad I^{\tilde{G}}(Sg_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B), \mathbf{f}) + \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}; s \neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) S^{\mathbf{G}'(s)}(Sg_{\mathbf{M},\mathcal{O}}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, B), \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}),$$

et de

$$(5) \qquad \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) \sum_{\tilde{L}'_s \in \mathcal{L}^{\tilde{G}'(s)}(\tilde{M}); \tilde{L}'_s \neq \tilde{G}'(s)} S_{\mathbf{L}'(s)}^{\mathbf{G}'(s)}(Sg_{\mathbf{M},\mathcal{O}}^{\mathbf{L}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, B), B, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}),$$

étant entendu que, si $s = 1$, $S_{\mathbf{L}'(s)}^{\mathbf{G}'(s)}(Sg_{\mathbf{M},\mathcal{O}}^{\mathbf{L}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, B), B, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}) = S_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(Sg_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta}, B), B, \mathbf{f})$.

On veut prouver que $X = 0$. Il suffit pour cela de prouver que (2) est égal à (4) et que (3) est égal à (5). Par définition du transfert, on peut remplacer dans (4) les termes $S^{\mathbf{G}'(s)}(Sg_{\mathbf{M},\mathcal{O}}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, B), B, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)})$ par $I^{\tilde{G}}(transfert(Sg_{\mathbf{M},\mathcal{O}}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, B)), \mathbf{f})$. Alors l'égalité de (2) et (4) résulte de la définition (1) de 2.4.

Dans (5), on regroupant les couples $(s, \tilde{L}'_s)$ selon l'espace de Levi $\tilde{L}$ associé et l'image de s dans $Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F}$ (le triplet $\mathbf{L}'(s)$ ne dépend que de cette image). L'expression (5) devient

$$\sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}), \tilde{L} \neq \tilde{G}} \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F}, \mathbf{L}'(s) \text{ elliptique}} \sum_{t \in sZ(\hat{L})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(t))$$
$$S_{\mathbf{L}'(s)}^{\mathbf{G}'(t)}(Sg_{\mathbf{M},\mathcal{O}}^{\mathbf{L}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, B), B, f^{\mathbf{G}'(t)}).$$

Soient s et t intervenant dans cette formule. On vérifie l'égalité

$$i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(t)) = i_{\tilde{M}}(\tilde{L}, \tilde{L}'(s)) i_{\tilde{L}'(s)}(\tilde{G}, \tilde{G}'(t)).$$

La non nullité du terme de droite implique que $\mathbf{L}'(s)$ est elliptique. L'expression (5) devient

$$(6) \qquad \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}), \tilde{L} \neq \tilde{G}} \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F}} i_{\tilde{M}}(\tilde{L}, \tilde{L}'(s))$$
$$\sum_{t \in sZ(\hat{L})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}} i_{\tilde{L}'(s)}(\tilde{G}, \tilde{G}'(t)) S_{\mathbf{L}'(s)}^{\mathbf{G}'(t)}(Sg_{\mathbf{M},\mathcal{O}}^{\mathbf{L}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, B), B, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(t)}).$$

Considérons la contribution de $\tilde{L}=\tilde{M}$ (qui n'intervient que si $\tilde{M}\neq\tilde{G}$). C'est simplement

$$\sum_{t\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(t))S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(t)}(Sg_{\mathbf{M},\mathcal{O}}^{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\delta},B),B,\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(t)}),$$

avec la même convention que plus haut si $t=1$. Par définition de $S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Sg_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},B),B,\mathbf{f})$, ceci n'est autre que $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(Sg_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},B),B,\mathbf{f})$. Considérons maintenant la contribution à (6) d'un $\tilde{L}\neq\tilde{M}$. Par définition, la somme intérieure en t n'est autre que $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{L}'(s),Sg_{\mathbf{M},\mathcal{O}}^{\mathbf{L}'(s)}(\boldsymbol{\delta},B),B,\mathbf{f})$, ou encore $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(transfert(Sg_{\mathbf{M},\mathcal{O}}^{\mathbf{L}'(s)}(\boldsymbol{\delta},B)),B,\mathbf{f})$. Parce que $\tilde{L}\neq\tilde{M}$, nos hypothèses de récurrence nous autorisent à appliquer le théorème 1.16. Il nous dit que le terme ci-dessus est aussi égal à $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(transfert(Sg_{\mathbf{M},\mathcal{O}}^{\mathbf{L}'(s)}(\boldsymbol{\delta},B)),B,\mathbf{f})$. L'expression (6) devient

$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{G}}\ \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F}} i_{\tilde{M}}(\tilde{L},\tilde{L}'(s))I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(transfert(Sg_{\mathbf{M},\mathcal{O}}^{\mathbf{L}'(s)}(\boldsymbol{\delta},B)),B,\mathbf{f}).$$

En utilisant la définition (1) de 2.4 avec $\tilde{G}$ remplacé par $\tilde{L}$, la somme intérieure en s devient $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta},B),B,\mathbf{f})$ et (6) est égal à (3). Cela démontre le (i) de l'énoncé. Le (ii) est immédiat.

□

2.6 Développement en germes d'intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes endoscopiques

On revient au cas général. Soient $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{M}(F)$.

Proposition. *Il existe un unique germe d'application linéaire $g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}$ sur $D_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ au voisinage de $\mathcal{O}$, à valeurs dans $D_{géom}(\mathcal{O}^{\tilde{G}},\omega)\otimes Mes(G(F))^*$, de sorte que, pour tout $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$ et tout $\boldsymbol{\gamma}\in D_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$, on a l'égalité*

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}),\mathbf{f})$$

pourvu que $\boldsymbol{\gamma}$ soit assez proche de $\mathcal{O}$.

Avant de démontrer cette proposition, posons une définition. Soit $\mathbf{M}'=(M',\mathcal{M}',\tilde{\zeta})$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(M,\tilde{M},\mathbf{a}_M)$ et soit $\delta\in\tilde{M}'(F)$. Notons ϵ la partie semi-simple de δ. Il correspond à ϵ une classe de conjugaison par $M(\bar{F})$ dans $\tilde{M}(\bar{F})$. On dit que δ est $\tilde{G}$-équisingulier si cette classe est formée d'éléments $\tilde{G}$-équisinguliers. On a

(1) si δ est $\tilde{G}$-équisingulier, δ est $\tilde{G}'(\tilde{s})$-équisingulier pour tout $\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$.

En effet, soit $\eta\in\tilde{M}(\bar{F})$ dans la classe de conjugaison correspondant à ϵ. On sait décrire les systèmes de racines de G_η, M_η, $G'(\tilde{s})_\epsilon$ et M'_ϵ, cf. [W2] 3.3. Les systèmes de racines de G_η et $G'(\tilde{s})_\epsilon$, resp. M_η et M'_ϵ ne sont pas égaux en général, mais sont en bijection, les deux bijections étant compatibles. Il en résulte que, si $G_\eta = M_\eta$, on a aussi $G'(\tilde{s})_\epsilon = M'_\epsilon$. $\square$

On note $D^{st}_{g\acute{e}om,\tilde{G}-\acute{e}qui}(\mathbf{M}')$ le sous-espace des éléments de $D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}')$ dont le support est formé d'éléments $\tilde{G}$-équisinguliers.

Preuve de la proposition. Comme toujours, oublions les espaces de mesures. Supposons d'abord que $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ n'est pas quasi-déployé et à torsion intérieure. Considérons d'abord une donnée endoscopique elliptique et relevante $\mathbf{M}' = (M',\mathcal{M}',\tilde{\zeta})$ de $(M,\tilde{M},\mathbf{a}_M)$. Il correspond à $\mathcal{O}$ une réunion $\mathcal{O}_{\tilde{M}'}$ de classes de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{M}'(F)$. On définit un germe d'application linéaire $\boldsymbol{\delta} \mapsto g^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta})$ sur $D^{st}_{g\acute{e}om,\tilde{G}-\acute{e}qui}(\mathbf{M}')$ au voisinage de $\mathcal{O}_{\tilde{M}'}$, à valeurs dans $D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}^{\tilde{G}},\omega)$, par la formule

$$(2)\qquad g^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}) = \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))transfert(Sg^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}',\mathcal{O}_{\tilde{M}'}}(\boldsymbol{\delta},B^{\tilde{G}})).$$

Les hypothèses de récurrence assurent que, pour tout $\tilde{s}$, la proposition 2.4 est vérifiée pour $\mathbf{G}'(\tilde{s})$. Donc les termes $Sg^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}',\mathcal{O}_{\tilde{M}'}}(\boldsymbol{\delta},B^{\tilde{G}})$ sont bien définis et sont stables. Avec cette définition, montrons que l'on a l'égalité

$$(3)\qquad I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{L}}(g^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}),\mathbf{f})$$

pourvu que $\boldsymbol{\delta}$ soit assez proche de $\mathcal{O}_{\tilde{M}'}$.

La preuve est similaire à celle de la proposition précédente. Faisons-la rapidement. On a par définition

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))S^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta},B^{\tilde{G}},\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}).$$

En utilisant la proposition 2.5, on obtient

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s})) \sum_{\tilde{L}'_{\tilde{s}}\in\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}')} S^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{L}'_{\tilde{s}}}(Sg^{\mathbf{L}'_{\tilde{s}}}_{\mathbf{M}',\mathcal{O}_{\tilde{M}'}}(\boldsymbol{\delta},B^{\tilde{G}}),B^{\tilde{G}},\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})$$

pouvu que $\boldsymbol{\delta}$ soit assez proche de $\mathcal{O}_{\tilde{M}'}$. On regroupe les couples $(\tilde{s},\tilde{L}_{\tilde{s}})$ selon l'espace de Levi $\tilde{L}$ de $\tilde{G}$ déterminé par l'égalité $\mathcal{A}_{\tilde{L}} = \mathcal{A}_{\tilde{L}'_{\tilde{s}}}$. On obtient

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta}},\mathbf{L}'(\tilde{s})\text{ elliptique}}$$

$$\sum_{\tilde{t}\in\tilde{s}Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{t}))S^{\mathbf{G}'(\tilde{t})}_{\mathbf{L}'(\tilde{s})}(Sg^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}',\mathcal{O}_{\tilde{M}'}}(\boldsymbol{\delta},B^{\tilde{G}}),B^{\tilde{G}},\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}).$$

On a encore l'égalité

$$i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{t})) = i_{\tilde{M}'}(\tilde{L},\tilde{L}'(\tilde{s}))i_{\tilde{L}'(\tilde{s})}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{t}))$$

et l'expression ci-dessus se transforme en

$$(4)\qquad I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} \sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{L},\tilde{L}'(\tilde{s}))$$

$$\sum_{\tilde{t}\in\tilde{s}Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{L}'(\tilde{s})}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{t}))S^{\mathbf{G}'(\tilde{t})}_{\mathbf{L}'(\tilde{s})}(Sg^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}',\mathcal{O}_{\tilde{M}'}}(\boldsymbol{\delta},B^{\tilde{G}}),B^{\tilde{G}},\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}).$$

La somme intérieure en $\tilde{t}$ n'est autre que $I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{L}}(\mathbf{L}'(\tilde{s}),Sg^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}',\mathcal{O}_{\tilde{M}'}}(\boldsymbol{\delta},B^{\tilde{G}}),\mathbf{f})$, ou encore

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{L}}(transfert(Sg^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}',\mathcal{O}_{\tilde{M}'}}(\boldsymbol{\delta},B^{\tilde{G}})),\mathbf{f}).$$

En utilisant la définition (2), (4) devient l'égalité (3).

Soit maintenant $\boldsymbol{\gamma}\in D_{géom}(\tilde{M}(F),\omega)$ assez proche de $\mathcal{O}$. On peut écrire

$$(5)\qquad \boldsymbol{\gamma}=\sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})} transfert(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'}),$$

avec des $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'}\in D^{st}_{géom}(\mathbf{M}')$, cf. [I] proposition 5.7. On peut supposer que, pour tout $\mathbf{M}'$ et tout élément δ du support $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'}$, il existe un élément γ du support de $\boldsymbol{\gamma}$ de sorte que sa partie semi-simple η appartienne à la classe de conjugaison dans $\tilde{M}(\bar{F})$ associée à la partie semi-simple ϵ de δ. Un tel δ est $\tilde{G}$-équisingulier et proche de $\mathcal{O}^{\tilde{M}'}$ si $\boldsymbol{\gamma}$ est assez proche de $\mathcal{O}$. Cela étant, on pose

$$(6)\qquad g^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma})=\sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})} g^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'}).$$

Pour que cette définition soit loisible, il faut montrer que :

(7) ce terme ne dépend pas de la décomposition (5) choisie.

Fixons cette décomposition. Par définition, on a

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=\sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})} I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'},\mathbf{f}).$$

En utilisant (3), on obtient

$$I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=\sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})}\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})} I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{L}}(g^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{M}'}),\mathbf{f})$$

$$=\sum_{L\in\mathcal{L}(\tilde{M})} I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{L}}(g^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma}),\mathbf{f}).$$

En raisonnant par récurrence, on peut supposer que, pour $\tilde{L}\neq\tilde{G}$, le germe $g^{\tilde{L},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma})$ ne dépend pas de la décomposition (5). L'unique terme restant, à savoir le terme pour $\tilde{L}=\tilde{G}$, n'en dépend donc pas non plus. Cela démontre l'assertion (7) et en même temps l'égalité de l'énoncé.

Supposons maintenant que $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ soit quasi-déployé et à torsion intérieure. Dans le raisonnement précédent, l'unique problème qui se pose est qu'on ne connaît pas la stabilité de l'un des germes que l'on manipule. Il s'agit du germe $Sg^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M},\mathcal{O}}$. Mais il n'intervient que dans $S^{\mathbf{G}}(Sg^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta}),\mathbf{f}^{\mathbf{G}})$. Il suffit de remplacer cette expression par $I^{\tilde{G}}(Sg^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta}),\mathbf{f})$ et la démonstration s'applique. $\square$

Supposons que $\mathcal{O}$ soit formé d'éléments $\tilde{G}$-équisinguliers de $\tilde{M}(F)$. Alors, pour $\mathbf{M}'=(M',\mathcal{M}',\tilde{\zeta})\in\mathcal{E}(\tilde{M},\mathbf{a})$, l'ensemble $\mathcal{O}_{\tilde{M}'}$ est formé d'éléments $\tilde{G}$-équisinguliers. Les définitions

(2) et (6) et la relation 2.4(2) entraînent alors que $g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma})=0$ au voisinage de $\mathcal{O}$ si $\tilde{M}\neq\tilde{G}$, tandis que, si $\tilde{M}=\tilde{G}$, on a l'égalité

$$g_{\tilde{G},\mathcal{O}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma})=\sum_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a})} transfert(g_{\mathbf{G}',\mathcal{O}_{\tilde{G}'}}^{\mathbf{G}'}(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{G}'})),$$

avec les notations de (5) adaptées au cas $\tilde{M}=\tilde{G}$. Pour $\mathbf{G}'$ apparaissant ci-dessus et pour $f\in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, on a les égalités

$$I^{\tilde{G}}(transfert(g_{\mathbf{G}',\mathcal{O}_{\tilde{G}'}}^{\mathbf{G}'}(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{G}'})),f)=S^{\mathbf{G}'}(g_{\mathbf{G}',\mathcal{O}_{\tilde{G}'}}^{\mathbf{G}'}(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{G}'}),f^{\mathbf{G}'})=S^{\mathbf{G}'}(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{G}'},f^{\mathbf{G}'})$$

$$=I^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{G}'}),f)=I^{\tilde{G}}(g_{\tilde{G},\mathcal{O}}^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{G}'}),f),$$

pourvu que $\boldsymbol{\gamma}$ soit assez proche de $\mathcal{O}$. Donc

$$transfert(g_{\mathbf{G}',\mathcal{O}_{\tilde{G}'}}^{\mathbf{G}'}(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{G}'}))=g_{\tilde{G},\mathcal{O}}^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{G}'})).$$

La formule plus haut devient

(8) si $\mathcal{O}$ est formé d'éléments $\tilde{G}$-équisinguliers de $\tilde{M}(F)$,

$$g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}=\begin{cases}0, & \text{si } \tilde{M}\neq\tilde{G},\\ g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{M}}, & \text{si } \tilde{M}=\tilde{G}.\end{cases}$$

Variante. Supposons $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Fixons un système de fonctions B comme en 1.9. Il y a une proposition similaire à celle ci-dessus concernant les distributions $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},B,\mathbf{f})$. On note $g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},B)$ les germes correspondants.

Variante. Supposons $G=\tilde{G}$, $\mathbf{a}=1$ et $\mathcal{O}=\{1\}$. Fixons une fonction B comme en 1.8. Il y a une proposition similaire à celle ci-dessus concernant les distributions $I_M^{G,\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},B,\mathbf{f})$. On note $g_{M,unip}^{G,\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},B)$ les germes correspondants.

2.7 Une égalité de germes

On conserve les mêmes données que dans le paragraphe précédent.

Proposition (à prouver). *Sous les hypothèses ci-dessus, on a l'égalité* $g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{G}}=g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}$.

2.8 Relation entre la proposition 2.7 et le théorème 1.16

On conserve les mêmes données. Toutes nos assertions sont tautologiques dans le cas $\tilde{M}=\tilde{G}$, on suppose donc ici $\tilde{M}\neq\tilde{G}$. Soient $\boldsymbol{\gamma}\in D_{g\acute{e}om,\tilde{G}-\acute{e}qui}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ et $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$. Supposons $\boldsymbol{\gamma}$ assez proche de $\mathcal{O}$. Considérons les développements des propositions 2.3(ii) et 2.6(ii) et faisons leur différence. Soit $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})$. Si $\tilde{L}\neq\tilde{G}$, nos hypothèses de récurrence permettent d'appliquer la proposition ci-dessus : on a $g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{L}}=g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}$. Si $\tilde{L}\neq\tilde{M}$, ces hypothèses permettent d'appliquer le théorème 1.16 : on a $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}',\mathbf{f})=I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}',\mathbf{f})$ pour tout $\boldsymbol{\gamma}'$. On obtient

$$(1)\qquad I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})-I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}),\mathbf{f})-I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}),\mathbf{f})$$

$$+I^{\tilde{G}}(g^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma})-g^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma}),\mathbf{f}).$$

Soit $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de $D_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ vérifiant la propriété suivante

(2) pour tout $\boldsymbol{\tau}\in D_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(F))^*$, il existe $\boldsymbol{\gamma}\in\mathcal{D}$ aussi proche que l'on veut de $\mathcal{O}$, de sorte que $g^{\tilde{M}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\tau}$.

Exemple. L'ensemble $\mathcal{D}=D_{géom,\tilde{G}-reg}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ des éléments de $D_{géom}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ à support fortement $\tilde{G}$-régulier vérifie cette propriété d'après 2.1(1).

Lemme. *Supposons que l'on ait l'égalité* $I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ *pour tout* $\boldsymbol{\gamma}\in\mathcal{D}$ *et pour tout* $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$. *Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) on a l'égalité $I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ *pour tout* $\boldsymbol{\gamma}\in D_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ *et tout* $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$ *;*

(ii) on a l'égalité $g^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma})=g^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma})$ *pour tout* $\boldsymbol{\gamma}\in\mathcal{D}$ *assez proche de* $\mathcal{O}$.

Preuve. L'hypothèse implique que, pour $\boldsymbol{\gamma}\in\mathcal{D}$, le membre de gauche de (1) est nul donc aussi celui de droite. Si (i) est vérifié, la première différence de ce membre de droite est nulle. La deuxième l'est donc aussi, d'où la conclusion de (ii). En sens inverse, (ii) implique de la même façon l'égalité

$$I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(g^{\tilde{M}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma}),\mathbf{f})=I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(g^{\tilde{M}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma}),\mathbf{f})$$

pour tout $\mathbf{f}$ et tout $\boldsymbol{\gamma}\in\mathcal{D}$. En utilisant (2), cela entraîne

$$I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\tau},\mathbf{f})=I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\tau},\mathbf{f})$$

pour tout $\boldsymbol{\tau}\in D_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(F))^*$. C'est l'assertion (i). $\square$

De nouveau, il y a des variantes dans les deux situations suivantes : $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure et on fixe un système de fonctions B comme en 1.9 ; ou $G=\tilde{G}$, $\mathbf{a}=1$ et on fixe une fonction B comme en 1.8.

2.9 Relation entre la proposition 2.4 et le théorème 1.10.

On suppose $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. On suppose donné un système de fonctions B comme en 1.9. Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{M}(F)$. Toutes nos assertions sont tautologiques dans le cas $\tilde{M}=\tilde{G}$, on suppose donc ici $\tilde{M}\neq\tilde{G}$. Soient $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{géom,\tilde{G}-équi}(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F))^*$ et $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$. On suppose que l'image de $\mathbf{f}$ dans $SI(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$ est nulle, autrement dit que les intégrales orbitales stables fortement régulières de $\mathbf{f}$ sont nulles. Considérons le développement de la proposition 2.5(i). Pour $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})$ tel que $\tilde{L}\neq\tilde{M}$ et $\tilde{L}\neq\tilde{G}$, les hypothèses de récurrence impliquent que $Sg^{\tilde{L}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta},B)$ est stable et que la forme linéaire $\mathbf{f}'\mapsto S^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta}',B,\mathbf{f}')$ est stable pour tout $\boldsymbol{\delta}'$ stable. Par ailleurs, pour $\tilde{L}=\tilde{M}$, on a simplement $Sg^{\tilde{M}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta},B)=g^{\tilde{M}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta})$ et ce terme est stable d'après le lemme 2.2. En vertu de l'hypothèse sur $\mathbf{f}$, le développement se réduit à

$$(1)\qquad S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},B,\mathbf{f})=S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(g^{\tilde{M}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta}),B,\mathbf{f})+I^{\tilde{G}}(Sg^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta},B),B,\mathbf{f}).$$

Soit $\mathcal{D}^{st}$ un sous-ensemble de $D^{st}_{g\acute{e}om,\tilde{G}-\acute{e}qui}(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F))^*$ vérifiant la propriété suivante

(2) pour tout $\boldsymbol{\tau}\in D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathcal{O})\otimes Mes(M(F))^*$, il existe $\boldsymbol{\delta}\in\mathcal{D}^{st}$ aussi proche que l'on veut de $\mathcal{O}$, de sorte que $g^{\tilde{M}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta})=\boldsymbol{\tau}$.

Exemple. L'ensemble $\mathcal{D}^{st}=D^{st}_{g\acute{e}om,\tilde{G}-reg}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ des éléments de $D^{st}_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ à support fortement $\tilde{G}$-régulier vérifie cette propriété d'après le lemme 2.2.

Lemme. *Supposons que la distribution $\mathbf{f}'\mapsto S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},B,\mathbf{f}')$ soit stable pour tout $\boldsymbol{\delta}\in\mathcal{D}^{st}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) la distribution $\mathbf{f}'\mapsto S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},B,\mathbf{f}')$ est stable pour tout $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathcal{O})\otimes Mes(M(F))^*$;

(ii) $Sg^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta},B)$ est stable pour tout $\boldsymbol{\delta}\in\mathcal{D}^{st}$ assez proche de $\mathcal{O}$.

La preuve est similaire à celle du lemme précédent.

2.10 Premières conséquences

Soient $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ un triplet quelconque et $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$.

Proposition. *(i) Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison semi-simple dans $\tilde{M}(F)$ formée d'éléments $\tilde{G}$-équisinguliers. Supposons que l'on ait l'égalité $I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})=I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ pour tout $\boldsymbol{\gamma}\in D_{g\acute{e}om,\tilde{G}-reg}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ et tout $\mathbf{f}\in C^\infty_c(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$. Alors cette égalité est vérifiée pour tout $\mathbf{f}$ et tout $\boldsymbol{\gamma}\in D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(F))^*$.*

(ii) Supposons $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{M}(F)$ formée d'éléments $\tilde{G}$-équisinguliers. Supposons que la distribution

$$\mathbf{f}\mapsto S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})$$

soit stable pour tout $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{g\acute{e}om,\tilde{G}-reg}(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F))^*$. Alors elle est stable pour tout $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathcal{O})\otimes Mes(M(F))^*$.

Preuve. Pour (i), on applique le lemme 2.8 en prenant $\mathcal{D}=D_{g\acute{e}om,\tilde{G}-reg}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$. Grâce à 2.3(1) et 2.6(8), la condition (ii) de ce lemme est vérifiée. Donc aussi la condition (i) de ce lemme, qui n'est autre que la conclusion de l'énoncé. Pour le (ii), on applique le lemme 2.9 en prenant $\mathcal{D}^{st}=D^{st}_{g\acute{e}om,\tilde{G}-reg}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*$. Grâce au lemme 2.2 et à 2.4(2), la condition (ii) de ce lemme est vérifiée. Donc aussi la condition (i) de ce lemme, qui n'est autre que la conclusion de l'énoncé. $\square$

2.11 Une formule d'induction

Soient $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ un triplet quelconque, $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et $\tilde{R}$ un espace de Levi de $\tilde{M}$. On rappelle qu'il y a un homomorphisme d'induction

$$\begin{array}{ccc} D_{g\acute{e}om}(\tilde{R}(F),\omega)\otimes Mes(R(F))^* & \to & D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^* \\ \boldsymbol{\gamma} & \mapsto & \boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}} \end{array}$$

Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison semi-simple par $R(F)$ dans $\tilde{R}(F)$. On note $\mathcal{O}^{\tilde{M}}$ la classe engendrée dans $\tilde{M}(F)$.

Lemme. *Soit $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{R}(F),\omega) \otimes Mes(R(F))^*$. On suppose que les éléments du support de $\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}}$ sont $\tilde{G}$-équisinguliers. Si $\boldsymbol{\gamma}$ est assez voisin de $\mathcal{O}$, on a l'égalité*

$$g^{\tilde{G}}_{\tilde{M},\mathcal{O}^{\tilde{M}}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})} d^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M},\tilde{L})(g^{\tilde{L}}_{\tilde{R},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma}))^{\tilde{G}}.$$

Remarque. Pour tout $\tilde{L}$ tel que $d^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{M},\tilde{L}) \neq 0$, les éléments du support de $\boldsymbol{\gamma}$ sont $\tilde{L}$-équisinguliers. Cela résulte de l'assertion suivante. Soit $\eta \in \tilde{R}(F)$. Supposons que η soit $\tilde{G}$-équisingulier en tant qu'élément de $\tilde{M}(F)$ (c'est-à-dire $M_\eta = G_\eta$). Alors η est $\tilde{L}$-équisingulier. Puisque $d^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\tilde{M},\tilde{L}) \neq 0$, les tores $A_{\tilde{M}}$ et $A_{\tilde{L}}$ engendrent $A_{\tilde{R}}$. Un élément de $\tilde{M}\cap\tilde{L}$ commute à $A_{\tilde{M}}$ et $A_{\tilde{L}}$, donc à $A_{\tilde{R}}$, donc appartient à $\tilde{R}$. D'où $\tilde{M}\cap\tilde{L} = \tilde{R}$. Un élément de $M\cap L$ agissant par multiplication à gauche conserve $\tilde{M}\cap\tilde{L}$, donc aussi $\tilde{R}$, donc appartient à R. D'où $M\cap L = R$. Puisque $L_\eta \subset G_\eta = M_\eta$, on a $L_\eta \subset M\cap L = R$, d'où l'égalité cherchée $L_\eta = R_\eta$.

Preuve. Soit $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$. On utilise le lemme 1.7 :

$$I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}},\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}_1\in\mathcal{L}(\tilde{R})} d^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M},\tilde{L}_1) I^{\tilde{L}_1}_{\tilde{R}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}_{\tilde{L}_1,\omega}).$$

On développe en germes les deux membres. A gauche, on obtient

$$(1) \qquad \sum_{\tilde{L}'\in\mathcal{L}(\tilde{M})} I^{\tilde{G}}_{\tilde{L}'}(g^{\tilde{L}'}_{\tilde{M},\mathcal{O}^{\tilde{M}}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}}),\mathbf{f}).$$

A droite, on obtient

$$\sum_{\tilde{L}_1\in\mathcal{L}(\tilde{R})} d^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M},\tilde{L}_1) \sum_{\tilde{L}_2\in\mathcal{L}(\tilde{R}),\tilde{L}_2\subset\tilde{L}_1} I^{\tilde{L}_1}_{\tilde{L}_2}(g^{\tilde{L}_2}_{\tilde{R},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma}),\mathbf{f}_{\tilde{L}_1,\omega}).$$

Considérons l'ensemble A des couples d'espace de Levi $(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)$ tels que $\tilde{R}\subset\tilde{L}_2\subset\tilde{L}_1$ et $d^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M},\tilde{L}_1)\neq 0$. Considérons l'ensemble B des triplets $(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2,\tilde{L}')$ tels que $\tilde{R}\subset\tilde{L}_2\subset\tilde{L}_1$, $\tilde{M}\subset\tilde{L}'$, $\tilde{L}_2\subset\tilde{L}'$ et $d^{\tilde{L}'}_{\tilde{R}}(\tilde{M},\tilde{L}_2)d^{\tilde{G}}_{\tilde{L}_2}(\tilde{L}',\tilde{L}_1)\neq 0$. On a prouvé en 1.7(5) que l'application $(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2,\tilde{L}')\mapsto(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2)$ etait une bijection de B sur A et que, pour $(\tilde{L}_1,\tilde{L}_2,\tilde{L}')\in B$, on avait l'égalité

$$d^{\tilde{L}'}_{\tilde{R}}(\tilde{M},\tilde{L}_2)d^{\tilde{G}}_{\tilde{L}_2}(\tilde{L}',\tilde{L}_1) = d^{\tilde{G}}_{\tilde{R}}(\tilde{M},\tilde{L}_1).$$

En utilisant cela, la somme ci-dessus se récrit

$$\sum_{\tilde{L}'\in\mathcal{L}(\tilde{M})} \sum_{\tilde{L}_2\in\mathcal{L}(\tilde{R}),\tilde{L}_2\subset\tilde{L}'} d^{\tilde{L}'}_{\tilde{R}}(\tilde{M},\tilde{L}_2) \sum_{\tilde{L}_1\in\mathcal{L}(\tilde{L}_2)} d^{\tilde{G}}_{\tilde{L}_2}(\tilde{L}',\tilde{L}_1) I^{\tilde{L}_1}_{\tilde{L}_2}(g^{\tilde{L}_2}_{\tilde{R},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma}),\mathbf{f}_{\tilde{L}_1,\omega}).$$

Par le lemme 1.7, la dernière somme en $\tilde{L}_1$ devient $I^{\tilde{G}}_{\tilde{L}'}((g^{\tilde{L}_2}_{\tilde{R},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\gamma}))^{\tilde{L}'},\mathbf{f})$. L'expression devient

$$(2) \qquad \sum_{\tilde{L}'\in\mathcal{L}(\tilde{M})} I^{\tilde{G}}_{\tilde{L}'}(X^{\tilde{L}'}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}),\mathbf{f}),$$

où
$$X_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'}(\boldsymbol{\gamma}) = \sum_{\tilde{L}_2 \in \mathcal{L}(\tilde{R}), \tilde{L}_2 \subset \tilde{L}'} d_{\tilde{R}}^{\tilde{L}'}(\tilde{M}, \tilde{L}_2)(g_{\tilde{R},\mathcal{O}}^{\tilde{L}_2}(\boldsymbol{\gamma}))^{\tilde{L}'}.$$

Les deux expressions (1) et (2) sont égales. L'assertion du lemme est que $X_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}) = g_{\tilde{M},\mathcal{O}^{\tilde{M}}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}})$. En raisonnant par récurrence, on peut supposer que cela est vrai si l'on remplace $\tilde{G}$ par $\tilde{L}' \neq \tilde{G}$. Par différence entre (1) et (2), on obtient
$$I^{\tilde{G}}(g_{\tilde{M},\mathcal{O}^{\tilde{M}}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}}) - X_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}), \mathbf{f}) = 0.$$

On en déduit l'égalité cherchée $X_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}) = g_{\tilde{M},\mathcal{O}^{\tilde{M}}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}})$. $\square$

2.12 Une formule d'induction, cas endoscopique

On conserve les mêmes données, à ceci près que $\mathcal{O}$ est maintenant une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{R}(F)$.

Lemme. *Soit $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{R}(F), \omega) \otimes Mes(R(F))^*$. On suppose que les éléments du support de $\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}}$ sont $\tilde{G}$-équisinguliers. Si $\boldsymbol{\gamma}$ est assez voisin de $\mathcal{O}$, on a l'égalité*
$$g_{\tilde{M},\mathcal{O}^{\tilde{M}}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}}) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{R})} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L})(g_{\tilde{R},\mathcal{O}}^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}))^{\tilde{G}}.$$

La preuve est la même que la précédente, en utilisant la relation 1.15 (1) en lieu et place du lemme 1.7.

2.13 Une formule d'induction, cas stable

On suppose $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ qusasi-déployé et à torsion intérieure. On fixe un système de fonctions B comme en 1.9. Soient $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$, $\tilde{R}$ un espace de Levi de $\tilde{M}$ et $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{R}(F)$.

Lemme. *Soit $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom}^{st}(\tilde{R}(F), \omega) \otimes Mes(R(F))^*$. On suppose que les éléments du support de $\boldsymbol{\delta}^{\tilde{M}}$ sont $\tilde{G}$-équisinguliers. Si $\boldsymbol{\delta}$ est assez voisin de $\mathcal{O}$, on a l'égalité*
$$Sg_{\tilde{M},\mathcal{O}^{\tilde{M}}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}^{\tilde{M}}) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{R})} e_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L})(Sg_{\tilde{R},\mathcal{O}}^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta}))^{\tilde{G}}.$$

La preuve est la même qu'en 2.11, en utilisant la proposition 1.14(ii).

3 Développements des intégrales orbitales pondérées invariantes

3.1 Des espaces associés au couple $(\tilde{G},\tilde{M})$

On considère un triplet $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ général. Soit $\tilde{M}$ un ensemble de Levi de $\tilde{G}$. Considérons l'ensemble des ensembles $\{\alpha_i; i=1,...,n\}$ formés d'éléments linéairement indépendants de $\Sigma(A_{\tilde{M}})$ et de nombre d'éléments maximal, c'est-à-dire tels que $n=a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{G}}$ (on considère ici les racines comme des éléments de $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}^*$). On dit que deux tels ensembles sont équivalents s'ils engendrent le même $\mathbb{Z}$-module dans $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}^*$. On note $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ l'ensemble des classes d'équivalence. Pour $J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$, on note R_J de $\mathbb{Z}$ module engendré par les α_i pour n'importe quel élément $\{\alpha_i; i=1,...,n\}\in J$.

Identifions <u>la</u> paire de Borel de G à une paire (B^*,T^*) pour laquelle M est standard. Soit $J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. On considère l'ensemble des racines $\beta\in\Sigma(T^*)$ qui se restreignent à $A_{\tilde{M}}$ en un élément de R_J. C'est le système de racines associé à un sous-groupe de G, que l'on note G_J. Il contient M. On vérifie qu'il est défini sur F et invariant par ad_γ pour tout $\gamma\in\tilde{M}(F)$ (parce que ad_γ induit l'identité sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$). Alors l'ensemble $\tilde{G}_J=G_J\tilde{M}$ est un sous-espace tordu de $\tilde{G}$. On introduit aussi un sous-espace U_J de l'espace des germes au point 1 de fonctions définies presque partout sur $A_{\tilde{M}}(F)$. C'est le sous-espace engendré linéairement par les germes de fonctions

$$a\mapsto\prod_{i=1,...,n}log(|\alpha_i(a)-\alpha_i(a)^{-1}|_F)$$

pour les ensembles $\{\alpha_i; i=1,...,n\}$ appartenant à J. Si $\tilde{M}=\tilde{G}$, $\mathcal{J}_{\tilde{G}}^{\tilde{G}}$ possède un unique élément $\emptyset$. Alors $U_\emptyset$ est la droite formée des germes de fonctions constantes.

Attention. Les fonctions ci-dessus ne sont pas linéairement indépendantes en général. Donnons un contre-exemple. On prend $\tilde{G}=G=SO(5)$ et pour $\tilde{M}=M$ un tore déployé maximal. On peut identifier $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}(F)$ à F^2 de sorte qu'un ensemble de racines positives soit formé des quatre applications linéaires

$$(x,y)\mapsto\left\{\begin{array}{ccc}\alpha(x,y)&=&x-y\\ \beta(x,y)&=&y\\ (\alpha+\beta)(x,y)&=&x\\ (\alpha+2\beta)(x,y)&=&x+y.\end{array}\right.$$

Il y a six ensembles formés de deux racines positives linéairement indépendantes. Cinq d'entre eux sont équivalents, le dernier, à savoir $\{\alpha,\alpha+2\beta\}$, formant une classe d'équivalence à lui seul (si on ne tient compte que des racines positives). Prenons pour J la classe des cinq premiers. En identifiant les germes de fonctions sur $A_{\tilde{M}}(F)$ au point 1 à des germes de fonctions sur $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}(F)$ au point 0, l'espace U_J contient en particulier les germes des fonctions

$$(x,y)\mapsto\left\{\begin{array}{l}log(|x-y|_F)log(|y|_F)\\ log(|x+y|_F)log(|x|_F)\\ log(|x-y|_F)log(|x|_F)\\ log(|x+y|_F)log(|y|_F)\end{array}\right.$$

(on suppose que la caractéristique résiduelle est impaire, sinon il faudrait multiplier toutes les racines par 2). Mais la somme des deux premières fonctions et des opposées des deux dernières est nulle. En effet, elle s'écrit

$$(log(|x-y|_F)-log(|x+y|_F))(log(|y|_F)-log(|x|_F)).$$

Si x et y ont même valeur absolue, le deuxième facteur est nul. Si x et y ont des valeurs absolues différentes, alors $x+y$ et $x-y$ ont des valeurs absolues égales au sup de celles de x et de y. Alors le premier facteur est nul.

On a néanmoins la propriété ci-dessous. Pour l'énoncer, on doit d'abord poser une définition. Appelons domaine admissible dans $A_{\tilde{M}}(F)$ l'intersection d'un voisinage ouvert assez petit de 1 avec l'ensemble des éléments a qui vérifient la condition $|\alpha(a)-1|_F > cd(a)$ pour tout $\alpha\in\Sigma(A_{\tilde{M}})$, où $c>0$ est un réel fixé. Pour un germe de fonction u définie presque partout dans un voisinage de 1 dans $A_{\tilde{M}}(F)$, disons que le germe u est équivalent à 0 s'il existe $r>0$ et, pour tout domaine admissible, un réel $C>0$ tel que $|u(a)|\leq Cd(a)^r$ pour tout a dans le domaine et assez proche de 1. On dit que deux germes sont équivalents si leur différence est équivalente à 0. On note $\simeq$ cette relation d'équivalence. Cette définition dépend de l'espace ambiant $\tilde{G}$ (puisqu'elle dépend de l'ensemble $\Sigma(A_{\tilde{M}})$), mais on espère que cela ne créera pas de difficulté. Notons que

(1) si u est un germe équivalent à 0 et si $\{\alpha_i; i=1,...,n\}$ est un ensemble fini d'éléments de $\Sigma(A_{\tilde{M}})$, le germe

$$a\mapsto u(a)\prod_{i=1,...,n} log|\alpha_i(a)-\alpha_i(a)^{-1}|_F$$

est lui-aussi équivalent à 0.

On a

(2) soit $u\in\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}} U_J$; supposons u équivalent à 0 ; alors $u=0$.

Preuve. Comme plus haut, on peut descendre via l'exponentielle le germe u en un germe de fonction sur $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}(F)$ au voisinage de 0. Pour $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})$, $J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}$ et $\underline{\alpha}=\{\alpha_i; i=1,...,n\}\in J$, on note $u_{\underline{\alpha}}$ la fonction définie presque partout sur $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}(F)$ par

$$u_{\underline{\alpha}}(H)=\prod_{i=1,...,n} log(|2\alpha_i(H)|_F).$$

Alors u est combinaison linéaire de telles fonctions. Soit $H\in\mathfrak{a}_{\tilde{M}}(F)$ en position générale. Fixons une uniformisante ϖ_F de F. Pour $k\in\mathbb{Z}$ et $\alpha\in\Sigma(A_{\tilde{M}})$, on a

$$log(|2\alpha(\varpi_F^kH)|_F)=-k\,log(q)+log(|2\alpha(H)|_F),$$

où q est le nombre d'éléments du corps résiduel. Il en résulte que $u(\varpi_F^kH)$ est un polynôme en k. Les éléments ϖ_F^kH, pour $k\geq 0$, restent dans un domaine admissible. Puisque u est équivalent à 0, on a donc $lim_{k\to\infty}u(\varpi_F^kH)=0$. Mais un polynôme en k qui tend vers 0 quand k tend vers l'infini est nul. Donc $u(\varpi_F^kH)=0$ pour tout k. En particulier, pour $k=0$, $u(H)=0$. L'élément H étant quelconque dans un ouvert dense, on a $u=0$. $\square$

On a

(3) supposons $\tilde{M}\neq\tilde{G}$; soient $J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ et $u\in U_J$; supposons que u soit équivalent à une constante ; alors $u=0$ et cette constante est nulle.

Preuve. Notons c cette constante. Rappelons que $\mathbb{C}$ s'identifie à l'espace $U_\emptyset$ associé à l'élément vide de $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{M}}$. On peut donc appliquer (2) à $u-c$, d'où $u-c=0$. On descend les fonctions en des fonctions sur $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}(F)$ et on utilise les notations de la preuve de (2). On écrit $u=\sum_{\underline{\alpha}\in J}c_{\underline{\alpha}}u_{\underline{\alpha}}$, avec des coefficients complexes $c_{\underline{\alpha}}$. Fixons un point H en position générale. Pour $\underline{\alpha}=\{\alpha_i; i=1,...,n\}, \underline{\beta}=\{\beta_i; i=1,...,n\}\in J$, les $\alpha_i(H)$ se déduisent des $\beta_i(H)$ par une matrice à coefficients entiers. Donc

$$sup_{i=1,..,n}(|\alpha_i(H)|_F)\leq sup_{i=1,...,n}(|\beta_i(H)|_F).$$

On peut échanger les rôles de $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$. Donc les deux sup sont égaux. Quitte à multiplier H par une puissance convenable de ϖ_F, on peut supposer que ces sup valent 1. Mais alors $u_{\underline{\alpha}}(H)=0$ pour tout $\underline{\alpha}\in J$. Donc $u(H)=0$. L'égalité $u-c=0$ entraîne $c=0$, puis $u=0$. $\square$

L'ensemble $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ contient un unique élément J tel que R_J contienne $\Sigma(A_{\tilde{M}})$ tout entier. C'est celui qui contient tout ensemble $\{\alpha_i; i=1,...,n\}$ formant une base de $\Sigma(A_{\tilde{M}})$ pour un certain ordre. On dit que cet élément J est l'élément maximal de $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$.

Soit $J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. On a $\Sigma^{\tilde{G}_J}(A_{\tilde{M}})\subset\Sigma^{\tilde{G}}(A_{\tilde{M}})$. L'ensemble $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}_J}$ s'identifie au sous-ensemble des $J'\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ qui contiennent une famille formée d'éléments de $\Sigma^{\tilde{G}_J}(A_{\tilde{M}})$, ou encore, ce qui revient au même, dont tous les éléments sont des familles formées d'éléments de $\Sigma^{\tilde{G}_J}(A_{\tilde{M}})$. Pour $J'\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}_J}$, l'espace $U_{J'}$ ne dépend pas de l'espace ambiant $\tilde{G}$ ou $\tilde{G}_J$. Cas particulier : J s'identifie à l'élément maximal de $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}_J}$.

Notons $Ann_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ l'annulateur de l'homomorphisme d'induction

$$D_{géom}(\tilde{M}(F),\omega)\otimes Mes(M(F))^*\to D_{géom}(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))^*.$$

Lemme. *Pour tout $J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$, on a l'inclusion $Ann_{\tilde{M}}^{\tilde{G}_J}\subset Ann_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$.*

Preuve. On fixe des mesures sur chaque groupe. Il est équivalent de prouver que l'image de l'application

$$\begin{array}{cccc} res_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}: & I(\tilde{G}(F),\omega) & \to & I(\tilde{M}(F),\omega)\\ & f & \mapsto & f_{\tilde{M},\omega}\end{array}$$

est contenue dans celle de l'application $res_{\tilde{M}}^{\tilde{G}_J}$. On fixe un espace de Levi minimal $\tilde{M}_0\subset\tilde{M}$ et un espace parabolique $\tilde{P}_0\in\mathcal{P}(\tilde{M}_0)$ de sorte que $\tilde{M}$ soit standard. D'après [I] lemme 4.3, l'image de $res_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ est formée des $\varphi\in I(\tilde{M}(F),\omega)$ qui vérifient la condition suivante :

- pour deux espaces de Levi $\tilde{R},\tilde{R}'\in\mathcal{L}^{\tilde{M}}(\tilde{M}_0)$ et pour $w\in W^G(\tilde{M}_0)$ tel que $w(\tilde{R})=\tilde{R}'$, la fonction $\varphi_{\tilde{R}',\omega}$ est l'image de $\varphi_{\tilde{R},\omega}$ par l'isomorphisme $I(\tilde{R}(F),\omega)\to I(\tilde{R}'(F),\omega)$ déduit de w.

En appliquant la même caractérisation pour $\tilde{G}_J$, l'assertion résulte simplement de l'inclusion $W^{G_J}(\tilde{M}_0)\subset W^G(\tilde{M}_0)$. Pour prouver celle-ci, identifions *la* paire de Borel de G à une paire (B^*,T^*) telle que $B^*\subset P_0$, $T^*\subset M_0$. Notons W^G le groupe de Weyl de T^* et $Norm_{W^G}(M_0)$ l'ensemble des éléments de W^G qui conservent M_0. La paire de Borel détermine un automorphisme θ de W^G et l'action galoisienne quasi-déployée sur cette paire détermine une action de Γ_F sur W^G. Alors $W^G(\tilde{M}_0)$ est isomorphe au sous-groupe des invariants par Γ_F et θ dans le quotient $(Norm_{W^G}(M_0)/W^{M_0})$. L'assertion à prouver résulte alors des faits que W^{G_J} est un sous-groupe de W^G (parce que le système de racines de G_J est un sous-système de celui de G) et que cette inclusion est équivariante pour les actions de θ et de Γ_F. $\square$

3.2 Un développement des intégrales pondérées ω-équivariantes

Soient $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ un triplet quelconque, $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison semi-simple dans $\tilde{M}(F)$. On pose $Ann_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}}=Ann_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}\cap(D_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(F))^*$.

Proposition. *Pour tout $J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$, il existe une unique application linéaire $\rho_J^{\tilde{G}}:D_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(F))^*\to U_J\otimes(D_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(F))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}}$ de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées.*

(i) L'application $\rho_J^{\tilde{G}}$ est la composée de $\rho_J^{\tilde{G}_J}$ et de la projection

$$U_J\otimes(D_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(F))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}_J}\to U_J\otimes(D_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(F))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}};$$

(ii) Pour tout $\boldsymbol{\gamma}\in D_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(F))^*$ et pour tout $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$, le germe en 1 de la fonction

$$a\mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(a\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}),$$

qui est définie pour tout $a\in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale, est équivalent à

$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}}I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\rho_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma},a)^{\tilde{L}},\mathbf{f})$$

.

Remarques. (1) Le terme $\rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma})$ définit un germe de fonction sur $A_{\tilde{M}}(F)$ à valeurs dans $(D_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(F))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}}$. On a noté $\rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},a)$ la valeur en a de ce germe.

(2) La proposition équivaut à dire que le germe de la fonction $a\mapsto g_{\tilde{M},\mathcal{O}}^{\tilde{G}}(a\boldsymbol{\gamma})$ est équivalent à

$$\sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}}\rho_J(\boldsymbol{\gamma},a)^{\tilde{G}}.$$

Preuve de l'unicité. On raisonne par récurrence sur la dimension de G. Pour $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})$, $\tilde{L}\neq\tilde{G}$ et $J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}$, l'application $\rho_J^{\tilde{L}}$ est déjà déterminée. Pour $J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ non maximal, l'application $\rho_J^{\tilde{G}}$ est uniquement déterminée par la condition (i). Il reste à déterminer $\rho_J^{\tilde{G}}$ pour l'unique élément maximal de $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. Pour ce J, fixons une base $(u_k)_{k=1,\dots,m}$ de U_J. On peut écrire $\rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},a)=\sum_{k=1,\dots,m}u_k(a)\boldsymbol{\gamma}_k$, avec des éléments $\boldsymbol{\gamma}_k\in D_{géom}(\mathcal{O},\omega)\otimes Mes(M(F))^*$. L'égalité du (ii) détermine à équivalence près le germe de la fonction $I^{\tilde{G}}(\rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},a)^{\tilde{G}},\mathbf{f})$ pour tout $\mathbf{f}$, c'est-à-dire de la fonction

$$\sum_{k=1,\dots,m}u_k(a)I^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}_k^{\tilde{G}},\mathbf{f}).$$

D'après 3.1(3), cela détermine les distributions $\boldsymbol{\gamma}_k^{\tilde{G}}$, ce qui est équivalent à déterminer les distributions $\boldsymbol{\gamma}_k$ modulo $Ann_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}}$.

Preuve de l'existence. Par linéarité, on peut se limiter à prouver l'existence des germes $\rho_J(\boldsymbol{\gamma},a)$ quand $\boldsymbol{\gamma}$ est l'intégrale orbitale associée à un élément γ dont la partie semi-simple appartient à $\mathcal{O}$. Montrons qu'alors, pour tout $\mathbf{f}$, le germe en 1 de la fonction

$a\mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(a\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ est équivalent à celui de la fonction qui à a associe

$$(3)\ \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}(-1)^{a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{L}}}r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma,a)I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{L}},\mathbf{f}).$$

Comme on le rappellera ci-dessous, les termes $r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma,a)$ sont des combinaisons linéaires de produits de termes $log(|\alpha(a)-\alpha(a)^{-1}|_F)$ pour $\alpha\in\Sigma(A_{\tilde{M}})$. En utilisant les relations 1.7(12) et 3.1(1), on voit que la fonction (3) ci-dessus est équivalente à

$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}(-1)^{a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{L}}}r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma,a)\sum_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{L})}r_{\tilde{L}}^{\tilde{R}}(\gamma,a)I_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(a\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}),$$

ou encore à

$$\sum_{\tilde{R}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}t_{\tilde{M}}^{\tilde{R}}(\gamma,a)I_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(a\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}),$$

où

$$t_{\tilde{M}}^{\tilde{R}}(\gamma,a)=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}^{\tilde{R}}(\tilde{M})}(-1)^{a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{L}}}r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma,a)r_{\tilde{L}}^{\tilde{R}}(\gamma,a).$$

Pour en déduire l'assertion ci-dessus, il suffit de prouver que

$$(4)\qquad t_{\tilde{M}}^{\tilde{R}}(\gamma,a)=\begin{cases}0, & \text{si } \tilde{R}\neq\tilde{M},\\ 1, & \text{si } \tilde{R}=\tilde{M}.\end{cases}$$

Définissons la $(\tilde{G},\tilde{M})$-famille $(r'_{\tilde{P}}(\gamma,a;\lambda))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$ par

$$r'_{\tilde{P}}(\gamma,a;\lambda)=r_{\tilde{P}}(\gamma,a;-\lambda)=r_{\tilde{P}}(\gamma,a;\lambda)^{-1}.$$

La première égalité entraîne que $r_{\tilde{M}}^{\prime\tilde{L}}(\gamma,a)=(-1)^{a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{L}}}r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma,a)$. Donc, par une formule usuelle, $t_{\tilde{M}}^{\tilde{R}}(\gamma,a)$ est la fonction associée à la famille produit $(r'_{\tilde{P}}(\gamma,a;\lambda)r_{\tilde{P}}(\gamma,a;\lambda))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$. Or celle-ci est une famille de fonctions constantes de valeur 1, d'où l'égalité (4).

La famille $(r_{\tilde{P}}(\gamma,a;\lambda))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$ est d'une forme particulière qui permet le calcul des fonctions $r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma,a)$. Précisément, pour toute base $\underline{\alpha}=\{\alpha_i;i=1,...,n\}$ de $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}$ formée d'éléments de $\Sigma^{\tilde{L}}(A_{\tilde{M}})$, notons $m(\underline{\alpha};\gamma)$ le volume du quotient de $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}$ par le $\mathbb{Z}$-module engendré par les $\rho(\alpha_i,\gamma)$ (cf. 1.5), avec la convention $m(\underline{\alpha},\gamma)=0$ si l'un de ces éléments est nul. Notons aussi $sgn(\underline{\alpha},\gamma)$ le produit des signes des nombres réels $<\alpha_i,\rho(\alpha_i,\gamma)>$ (avec la même convention). Et notons $u_{\underline{\alpha}}$ la fonction sur $A_{\tilde{M}}(F)$ définie par

$$u_{\underline{\alpha}}(a)=\prod_{i=1,\dots,n}log(|\alpha_i(a)-\alpha_i(a)^{-1}|_F).$$

Dans le cas particulier où $\tilde{L}=\tilde{M}$, auquel cas $\underline{\alpha}$ est l'ensemble vide, on admet par convention que les trois termes que l'on vient de définir valent 1. Alors le lemme 7.1 de [A5] entraîne l'égalité

$$r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\gamma,a)=\sum_{\underline{\alpha}}m(\underline{\alpha},\gamma)sgn(\underline{\alpha},\gamma)u_{\underline{\alpha}}(a),$$

où on somme sur les ensembles $\underline{\alpha}$ décrits ci-dessus. L'ensemble de ces ensembles n'est autre que la réunion des $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}$. Pour tout $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$, posons

$$(5) \qquad \rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, a) = \sum_{\underline{\alpha} \in J} m(\underline{\alpha}, \gamma) sgn(\underline{\alpha}, \gamma) u_{\underline{\alpha}}(a) \boldsymbol{\gamma}.$$

C'est un élément de $U_J \otimes D_{géom}(\mathcal{O}, \omega) \otimes Mes(M(F))^*$. Alors la somme (3) devient

$$\sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} \sum_{J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}} I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\rho_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}, a)^{\tilde{L}}, \mathbf{f}).$$

Puisque la somme (3) est, à équivalence près, le germe de $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(a\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$, on a obtenu l'assertion (ii) de l'énoncé. L'assertion (i) est immédiate d'après la définition de $\rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, a)$ et 1.5(4). $\square$

On a

(6) si $\tilde{M} = \tilde{G}$, $\rho_{\emptyset}^{\tilde{G}}$ est l'identité, modulo l'isomorphisme $U_{\emptyset} \simeq \mathbb{C}$.

C'est immédiat sur la définition (5).

3.3 Développement des intégrales orbitales pondérées invariantes et fonction B

On suppose $G = \tilde{G}$ et $\mathbf{a} = 1$. On fixe une fonction B comme en 1.8. Soit M un Levi de G. On dispose alors de l'ensemble $\Sigma(A_M, B)$. On peut reprendre les définitions de 3.1 en remplaçant partout l'ensemble $\Sigma(A_{\tilde{M}})$ par cet ensemble $\Sigma(A_M, B)$. En particulier, on note $\mathcal{J}_M^G(B)$ l'analogue de $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. Toutes les propriétés énoncées en 3.1 restent vraies avec ces définitions modifiées. La seule différence est que, pour $J \in \mathcal{J}_M^G(B)$, le groupe G_J n'est plus en général un sous-groupe de G (les groupes G_α de 1.8 en sont des cas particuliers). Cela ne crée pas de perturbations. De même, l'analogue de la proposition 3.2 reste vraie, avec la même preuve. Enonçons-la, avec des notations évidentes.

Proposition. *Pour tout $J \in \mathcal{J}_M^G(B)$, il existe une unique application linéaire ρ_J^G : $D_{unip}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^* \to U_J \otimes (D_{unip}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*)/Ann_{unip}^G$ de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées.*

(i) L'application ρ_J^G est la composée de $\rho_J^{G_J}$ et de la projection

$$U_J \otimes (D_{unip}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*)/Ann_{unip}^{G_J} \to U_J \otimes (D_{unip}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*)/Ann_{unip}^G.$$

(ii) Pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{unip}(M(F)) \otimes Mes(M(F))^*$ et pour tout $\mathbf{f} \in I(G(F)) \otimes Mes(G(F))$, le germe en 1 de la fonction

$$a \mapsto I_M^G(a\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}),$$

qui est définie pour tout $a \in A_M(F)$ en position générale, est équivalent à

$$\sum_{L \in \mathcal{L}(M)} \sum_{J \in \mathcal{J}_M^G(B)} I_L^G(\rho_J^L(\boldsymbol{\gamma}, a)^L, B, \mathbf{f})$$

.

3.4 Développement des intégrales orbitales pondérées invariantes et système de fonctions B

On suppose $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. On fixe un système de fonctions B comme en 1.9. Soient $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison semi-simple dans $\tilde{M}(F)$. Pour $\eta \in \mathcal{O}$, on a défini l'ensemble $\Sigma(A_M, B_\eta)$ en 1.9. Il ne dépend pas du choix de η, on le note plutôt $\Sigma(A_M, B_\mathcal{O})$. De nouveau, on peut reprendre les définitions de 3.1 en remplaçant partout l'ensemble $\Sigma(A_{\tilde{M}})$ par cet ensemble $\Sigma(A_M, B_\mathcal{O})$. En particulier, on note $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_\mathcal{O})$ l'analogue de $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. Remarquons que cet ensemble peut être vide. En effet, puisque $\Sigma(A_M, B_\mathcal{O})$ est par définition l'ensemble des restrictions d'éléments de $\Sigma^{G_\eta}(A_{M_\eta}, B_\eta)$, il n'existe pas de sous-ensemble linéairement indépendant et de rang $a_M - a_G$ si l'ensemble $\Sigma^{G_\eta}(A_{M_\eta})$ est trop petit.

Il y a une différence cruciale avec la situation de 3.1 : pour $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_\mathcal{O})$, on ne peut plus définir le groupe G_J car, pour $\eta \in \mathcal{O}$, la fonction B_η n'est définie que sur un sous-ensemble de l'ensemble de racines de G. L'assertion (i) de la proposition 3.2 n'a pas d'analogue dans notre situation. On peut toutefois définir une application

$$\rho_J^{\tilde{G}} : D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(F))^* \to U_J \otimes (D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(F))^*)/Ann_\mathcal{O}^G$$

de la façon suivante. Par linéarité, il suffit de la définir sur une intégrale orbitale $\boldsymbol{\gamma}$ associée à un élément γ dont la partie semi-simple appartient à $\mathcal{O}$. On reprend la définition 3.2(5), en y remplaçant l'ensemble $\Sigma(A_{\tilde{M}})$ par $\Sigma(A_M, B_\mathcal{O})$. C'est-à-dire qu'avec des notations adaptées, on pose

$$(1) \qquad \rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, a) = \sum_{\underline{\alpha} \in J} m(\underline{\alpha}, \gamma, B_\mathcal{O}) sgn(\underline{\alpha}, \gamma, B_\mathcal{O}) u_{\underline{\alpha}}(a) \boldsymbol{\gamma}.$$

Plus exactement, $\rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, a)$ est l'image de ce terme modulo $Ann_\mathcal{O}^G$. Remarquons que, si $\tilde{M} = \tilde{G}$, on a $\rho_\emptyset^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, a) = \boldsymbol{\gamma}$. La partie "existence" de la proposition 3.2 reste valable, ce qui conduit à l'énoncé suivant.

Proposition. *Pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(F))^*$ et pour tout $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$, le germe en 1 de la fonction*

$$a \mapsto I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(a\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}),$$

qui est définie pour tout $a \in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale, est équivalent à

$$\sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} \sum_{J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(B_\mathcal{O})} I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\rho_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}, a)^{\tilde{L}}, B, \mathbf{f})$$

.

Remarques. (2) On peut remplacer $\mathcal{O}$ par une réunion finie $\cup_{i=1,\ldots,n}\mathcal{O}_i$ de classes de conjugaison semi-simples, pour peu que l'ensemble $\Sigma(A_M, B_{\mathcal{O}_i})$ ne dépende pas de i. C'est le cas si $\mathcal{O}$ est une classe de conjugaison stable.

(3) Supposons que le système de fonctions B soit le système "trivial", c'est-à-dire que la fonction B_η soit constante de valeur 1 pour tout $\eta \in \tilde{G}_{ss}(F)$. Les ensembles $\Sigma(A_M)$ et $\Sigma(A_M, B_\mathcal{O})$ ne coïncident pas pour autant car, par définition, ce dernier est l'ensemble

des éléments du premier qui sont restrictions d'éléments de $\Sigma^{G_\eta}(A_{M_\eta})$ pour $\eta \in \mathcal{O}$. On a toutefois une injection $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}}) \subset \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. Il résulte des définitions que, pour $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})$, les deux définitions possibles de $\rho_J^{\tilde{G}}$ coïncident, tandis que, pour $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} - \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})$, le terme $\rho_J^{\tilde{G}}$ défini en 3.2 est nul.

3.5 Termes d'un développement stable

On conserve la même situation que dans le paragraphe précédent. L'ensemble $\mathcal{O}$ est maintenant une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{M}(F)$. On note $Ann_{\tilde{M}}^{\tilde{G},st}$, resp. $Ann_{\mathcal{O}}^{\tilde{G},st}$, l'intersection de $Ann_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ et de $D_{géom}^{st}(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))^*$, resp. de $Ann_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}}$ et de $D_{géom}^{st}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(F))^*$.

Soit $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$. Comme on l'a dit en 1.10, il se déduit du système de fonctions B un tel système sur $\tilde{G}'(s;F)$ que l'on note encore B. Il résulte des définitions que $\Sigma^{G'(s)}(A_M, B_{\mathcal{O}}) \subset \Sigma^G(A_M, B_{\mathcal{O}})$. Supposons $\mathbf{G}'(s)$ elliptique. Alors $a_{G'(s)} = a_G$ et de cette inclusion se déduit une inclusion $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(B_{\mathcal{O}}) \subset \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})$. Si $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(B_{\mathcal{O}})$, la preuve du lemme 3.1 s'applique : on a l'inclusion $Ann_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}'(s)} \subset Ann_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}}$. On voit aussi que l'espace U_J est unique, sa définition ne dépendant pas de l'espace ambiant $\tilde{G}$ ou $\tilde{G}'(s)$.

Soit $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})$. Dans le paragraphe précédent, on a défini une application $\rho_J^{\tilde{G}}$ sur $D_{géom}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(F))^*$. Notons $\rho_{J,st}^{\tilde{G}}$ sa restriction à $D_{géom}^{st}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(F))^*$. On définit une application

$$\sigma_J : D_{géom}^{st}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(F))^* \to U_J \otimes (D_{géom}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(F))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}}$$

ou plus précisément $\sigma_J^{\tilde{G}}$ par la formule de récurrence

$$(1) \qquad \sigma_J^{\tilde{G}} = \rho_{J,st} - \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}; s \neq 1, J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(B_{\mathcal{O}})} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) \sigma_J^{\tilde{G}'(s)}.$$

Plus exactement, les $\sigma_J^{\tilde{G}'(s)}$ prennent leurs valeurs dans

$$U_J \otimes (D_{géom}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(F))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}'(s)}$$

mais, grâce à ce que l'on a dit ci-dessus, on les pousse en des applications à valeurs dans

$$U_J \otimes (D_{géom}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(F))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}}.$$

Proposition (à prouver). *Pour tout $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})$, $\sigma_J^{\tilde{G}}$ prend ses valeurs dans*

$$U_J \otimes (D_{géom}^{st}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(F))^*)/Ann_{\mathcal{O}}^{\tilde{G},st}.$$

3.6 Quelques formalités

On considère un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure, un système de fonctions B comme en 1.9, un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ et une classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O}$ dans $\tilde{M}(F)$. Considérons des extensions compatibles

$$1 \to C_\natural \to G_\natural \stackrel{q}{\to} G \to 1 \text{ et } \tilde{G}_\natural \to \tilde{G}$$

où $C_\natural$ est un tore central induit et $\tilde{G}_\natural$ est encore à torsion intérieure. On fixe un caractère $\lambda_\natural$ de $C_\natural(F)$. On note $\tilde{M}_\natural$ l'image réciproque de $\tilde{M}$ dans $\tilde{G}_\natural$. On fixe une classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O}_\natural$ dans $M_\natural(F)$ se projetant sur $\mathcal{O}$. Le système de fonctions B se relève à $G_\natural(F)$. L'application $\alpha \mapsto \alpha \circ q$ est une bijection de $\Sigma(A_M, B_{\mathcal{O}})$ sur $\Sigma(A_{M_\natural}, B_{\mathcal{O}_\natural})$. Via cette bijection, les ensembles $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})$ et $\mathcal{J}_{\tilde{M}_\natural}^{\tilde{G}_\natural}(B_{\mathcal{O}_\natural})$ s'identifient. Pour un élément J de cet ensemble, on a un espace U_J de germes de fonctions sur $A_M(F)$ et un autre, notons-le $U_{\natural,J}$, de germes de fonctions sur $A_{M_\natural}(F)$. Il est clair que $U_{\natural,J}$ est formé des composés $u \circ q$ pour $u \in U_J$. On peut ainsi identifier ces deux espaces. Rappelons que l'on dispose d'un homomorphisme

$$D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}_\natural(F)) \to D_{g\acute{e}om,\lambda_\natural}(\tilde{M}_\natural(F)),$$

cf. 1.10 (3). Fixons une mesure de Haar sur $C_\natural(F)$, qui permet d'identifier $Mes(M_\natural(F))$ à $Mes(M(F))$. On vérifie sur sa définition que l'application $\rho_J^{\tilde{G}_\natural}$ se quotiente en un homomorphisme $\rho_{J,\lambda_\natural}^{\tilde{G}_\natural}$ de sorte que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}_\natural) \otimes Mes(M_\natural(F))^* & \stackrel{\rho_J^{\tilde{G}_\natural}}{\to} & U_{\natural,J} \otimes (D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}_\natural) \otimes Mes(M_\natural(F))^*)/Ann_{\mathcal{O}_\natural}^{\tilde{G}_\natural} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{g\acute{e}om,\lambda_\natural}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(F))^* & \stackrel{\rho_{J,\lambda_\natural}^{\tilde{G}_\natural}}{\to} & U_J \otimes (D_{g\acute{e}om,\lambda_\natural}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(F))^*)/Ann_{\mathcal{O},\lambda_\natural}^{\tilde{G}_\natural} \end{array}$$

avec une définition naturelle du dernier annulateur. On voit que l'application $\rho_{J,\lambda_\natural}^{\tilde{G}_\natural}$ ne dépend pas des choix de $\mathcal{O}_\natural$ et de la mesure sur $C_\natural(F)$. Par des calculs analogues à ceux de la preuve de 1.10, on montre que l'application $\sigma_J^{\tilde{G}_\natural}$ se quotiente de même en une application

$$\sigma_{J,\lambda_\natural}^{\tilde{G}_\natural} : D_{g\acute{e}om,\lambda_\natural}^{st}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(F))^* \to U_J \otimes (D_{g\acute{e}om,\lambda_\natural}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(F))^*)/Ann_{\mathcal{O},\lambda_\natural}^{\tilde{G}_\natural}.$$

Considérons d'autres extensions

$$1 \to C_\flat \to G_\flat \to G \to 1 \text{ et } \tilde{G}_\flat \to \tilde{G}$$

un caractère $\lambda_\flat$ de $C_\flat(F)$ et une classe de conjugaison stable $\mathcal{O}_\flat$ vérifiant des conditions similaires. On renvoie à [II] 1.10 pour les notations utilisées ci-dessous. Supposons donnée un caractère $\lambda_{\natural,\flat}$ du produit fibré $G_{\natural,\flat}(F)$ dont la restriction à $C_\natural(F) \times C_\flat(F)$ soit $\lambda_\natural \times \lambda_\flat^{-1}$. Supposons donné une fonction non nulle $\tilde{\lambda}_{\natural,\flat}$ sur le produit fibré $\tilde{G}_{\natural,\flat}(F)$ qui se transforme selon le caractère $\lambda_{\natural,\flat}$. A l'aide de cette fonction, on peut identifier comme en [II] 1.10 tous les espaces intervenant ci-dessus relatifs aux données indexées par $\natural$ avec les espaces analogues relatifs aux données indexées par $\flat$. On vérifie comme en [II] 1.10 que les applications $\rho_{J,\lambda_\natural}^{\tilde{G}_\natural}$ et $\sigma_{J,\lambda_\natural}^{\tilde{G}_\natural}$ s'identifient à $\rho_{J,\lambda_\flat}^{\tilde{G}_\flat}$ et $\sigma_{J,\lambda_\flat}^{\tilde{G}_\flat}$.

On peut aussi remplacer $\mathcal{O}$ par une réunion finie de classes de conjugaison stable semi-simples, pourvu qu'elles vérifient la condition de la remarque 3.4(2)

Comme application, considérons un triplet $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$, un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$, une classe de conjugaison stable semi-simple $\mathcal{O}$ dans $\tilde{M}(F)$, une donnée endoscopique $\mathbf{M}'=(M',\mathcal{M}',\tilde{\zeta})$ de $(M,\tilde{M},\mathbf{a})$ qui est elliptique et relevante et un élément $\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. On pose simplement $\mathbf{G}'=\mathbf{G}'(\tilde{s})$, $G'=G'(\tilde{s})$ etc... On suppose $\mathbf{G}'$ elliptique. On note $\mathcal{O}'$ la réunion finie des classes de conjugaison stable semi-simples dans $\tilde{M}'(F)$ qui correspondent à $\mathcal{O}$.

On considère plus précisément les trois cas suivants :

(1) $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quelconque, on munit $\tilde{G}'(F)$ du système de fonctions $B^{\tilde{G}}$ que l'on note simplement B ;

(2) $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure ; on suppose donné un système de fonctions B sur $\tilde{G}(F)$, dont on déduit un tel système sur $\tilde{G}'(F)$ que l'on note encore B ;

(3) $G=\tilde{G}$ et $\mathbf{a}=1$; on suppose $\mathcal{O}=\{1\}$; on suppose donnée une fonction B sur $G(F)$ comme en 1.8, dont on déduit une telle fonction sur $G'(F)$ que l'on note encore B.

Fixons des données auxiliaires $G'_1,...,\Delta_1$ pour $\mathbf{G}'$. Pour $J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'}(B_{\mathcal{O}'})$, on définit comme ci-dessus les applications

$$\rho_{J,\lambda_1}^{\tilde{G}'_1}:D_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\mathcal{O}')\otimes Mes(M'(F))^*\to U_J\otimes(D_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\mathcal{O}')\otimes Mes(M'(F))^*)/Ann_{\mathcal{O}',\lambda_1}^{\tilde{G}'_1}$$

et

$$\sigma_{J,\lambda_1}^{\tilde{G}'_1}:D^{st}_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\mathcal{O}')\otimes Mes(M'(F))^*\to U_J\otimes(D_{g\acute{e}om,\lambda_1}(\mathcal{O}')\otimes Mes(M'(F))^*)/Ann_{\mathcal{O}',\lambda_1}^{\tilde{G}'_1}.$$

Quand on fait varier les données auxiliaires, ces application se recollent en ces applications

$$\rho_J^{\mathbf{G}'}:D_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}',\mathcal{O}')\otimes Mes(M'(F))^*\to U_J\otimes(D_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}',\mathcal{O}')\otimes Mes(M'(F))^*)/Ann_{\mathcal{O}'}^{\mathbf{G}'}$$

et

$$\sigma_J^{\mathbf{G}'}:D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}',\mathcal{O}')\otimes Mes(M'(F))^*\to U_J\otimes(D_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}',\mathcal{O}')\otimes Mes(M'(F))^*)/Ann_{\mathcal{O}'}^{\mathbf{G}'}.$$

On a adapté les notations de façon évidente.

Plaçons-nous sous les hypothèses de (2) et supposons de plus que $\mathbf{M}'$ est la donnée "maximale" $\mathbf{M}$. Dans ce cas, $D_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}',\mathcal{O}')$ s'identifie à $D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}')$. On vérifie en reprenant les définitions que $\rho_J^{\mathbf{G}'}$ s'identifie à $\rho_J^{G'}$. Cette propriété se propage formellement : $\sigma_J^{\mathbf{G}'}$ s'identifie à $\sigma_J^{G'}$. La formule (1) du paragraphe 3.5 se récrit

$$(4)\qquad \sigma_J^{\tilde{G}}=\rho_{J,st}-\sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F};s\neq1,J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(B_{\mathcal{O}})}i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))transfert(\sigma_J^{\mathbf{G}'(s)}).$$

Le transfert est ici l'isomorphisme naturel de $D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{M})\otimes Mes(M(F))^*$ sur $D^{st}_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F))\otimes Mes(M(F))^*$.

Dans le cas (3), on a mieux. On a $\mathcal{O}'=\{1\}$ et on peut choisir pour relèvement l'orbite $\mathcal{O}'_1=\{1\}$. Parce C_1 est induit, l'application $M'_1(F)\to M'(F)$ est surjective. On en déduit aisément que les homomorphismes naturels

$$D_{unip,\lambda_1}(M'_1(F))\leftarrow D_{unip}(M'_1(F))\to D_{unip}(M'(F))$$

sont des isomorphismes. On en déduit un isomorphisme $D_{unip}(\mathbf{M}') \simeq D_{unip}(M'(F))$. Ainsi, les applications $\rho_J^{\mathbf{G}'}$ et $\sigma_J^{\mathbf{G}'}$ s'identifient à des homomorphismes

$$\rho_J^{\mathbf{G}'} : D_{unip}(M'(F)) \otimes Mes(M'(F))^* \to U_J \otimes (D_{unip}(M'(F)) \otimes Mes(M'(F))^*)/Ann_{unip}^{G'}$$

et

$$\sigma_J^{\mathbf{G}'} : D_{unip}^{st}(M'(F)) \otimes Mes(M'(F))^* \to U_J \otimes (D_{unip}(M'(F)) \otimes Mes(M'(F))^*)/Ann_{unip}^{G'}.$$

En reprenant les définitions, on voit que $\rho_J^{\mathbf{G}'}$ s'identifie à $\rho_J^{G'}$. Cette propriété se propage : $\sigma_J^{\mathbf{G}'}$ s'identifie à $\sigma_J^{G'}$.

3.7 Développement des intégrales orbitales pondérées stables

On suppose $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. On fixe un système de fonctions B comme en 1.9. Soient $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{M}(F)$.

Proposition. *(i) Pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom}^{st}(\mathcal{O}) \otimes Mes(M(F))^*$ et pour tout $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$, le germe en 1 de la fonction*

$$a \mapsto S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(a\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}),$$

qui est définie pour tout $a \in A_M(F)$ en position générale, est équivalent à

$$\sum_{J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})} I^{\tilde{G}}(\sigma_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, a)^{\tilde{G}}, \mathbf{f})$$

$$+ \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M}), \tilde{L} \neq \tilde{G}} \sum_{J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(B_{\mathcal{O}})} S_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\sigma_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta}, a)^{\tilde{L}}, B, \mathbf{f}).$$

(ii) Supposons vérifiée la proposition 3.5. Alors le développement précédent prend la forme

$$\sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} \sum_{J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(B_{\mathcal{O}})} S_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\sigma_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta}, a)^{\tilde{L}}, B, \mathbf{f}).$$

Preuve. Notons qu'en vertu de 3.5(2) et de nos hypothèses de récurrence, les termes $\sigma_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta}, a)^{\tilde{L}}$ sont stables si $\tilde{L} \neq \tilde{G}$. Les termes de la formule du (i) ont donc un sens. Evidemment, si les termes $\sigma_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, a)^{\tilde{G}}$ sont stables eux-aussi, on peut remplacer les intégrales orbitales figurant dans cette formule par des intégrales orbitales stables. Donc (ii) résulte immédiatement de (i).

On part de la définition

$$(1) \qquad S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(a\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(a\boldsymbol{\delta}, f) - \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}; s \neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(a\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}).$$

La proposition 3.4 nous fournit le développement du premier terme : $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(a\boldsymbol{\delta}, f)$ est équivalent à

$$(2) \qquad \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} \sum_{J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(B_{\mathcal{O}})} I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\rho_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta}, a)^{\tilde{L}}, B, \mathbf{f}).$$

Pour tout $s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$, avec $s\neq 1$, on peut développer le terme $S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(a\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)})$ par la proposition que l'on cherche à prouver, appliquée à $\mathbf{G}'(s)$. On passe sur les formalités permettant d'appliquer cette proposition à une telle donnée plutôt qu'à un espace $\tilde{G}'(s)$. On obtient que la somme du membre de droite de (1) est équivalente à

$$\sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F},s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))\sum_{\tilde{L}'_s\in\mathcal{L}^{\tilde{G}'(s)}(\tilde{M})}$$
$$\sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'_s}(B_{\mathcal{O}})} S_{\mathbf{L}'(s)}^{\mathbf{G}'(s)}(\sigma_J^{\mathbf{L}'(s)}(\boldsymbol{\delta},a)^{\mathbf{L}'(s)},B,\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}).$$

La notation $\mathbf{L}'(s)$ est la même que dans la preuve de 2.5. Comme dans la preuve de la proposition 2.5, on regroupe les couples $(s,\tilde{L}'_s)$ intervenant selon l'espace de Levi $\tilde{L}$ qu'ils déterminent par l'égalité $\mathcal{A}_{\tilde{L}}=\mathcal{A}_{\tilde{L}'_s}$. L'expression précédente devient

$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\ \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F},\mathbf{L}'(s)\text{ elliptique}}\ \sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'(s)}(B_{\mathcal{O}})}$$

$$\sum_{t\in sZ(\hat{L})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F},t\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(t))S_{\mathbf{L}'(s)}^{\mathbf{G}'(t)}(\sigma_J^{\mathbf{L}'(s)}(\boldsymbol{\delta},a)^{\mathbf{L}'(s)},B,\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(t)}).$$

Comme en 2.5, on a l'égalité

$$i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(t))=i_{\tilde{M}}(\tilde{L},\tilde{L}'(s))i_{\tilde{L}'(s)}(\tilde{G},\tilde{G}'(t))$$

et l'expression devient

$$(3)\qquad \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\ \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F}} i_{\tilde{M}}(\tilde{L},\tilde{L}'(s))\sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'(s)}(B_{\mathcal{O}})}$$

$$\sum_{t\in sZ(\hat{L})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F},t\neq 1} i_{\tilde{L}'(s)}(\tilde{G},\tilde{G}'(t))S_{\mathbf{L}'(s)}^{\mathbf{G}'(t)}(\sigma_J^{\mathbf{L}'(s)}(\boldsymbol{\delta},a)^{\mathbf{L}'(s)},B,\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(t)}).$$

Fixons $\tilde{L}$, s et J et étudions la somme intérieure en t. Supposons d'abord $\tilde{L}\neq\tilde{G}$ et $\tilde{L}\neq\tilde{M}$. On sait par récurrence que les termes $\sigma_J^{\mathbf{L}'(s)}(\boldsymbol{\delta},a)^{\mathbf{L}'(s)}$ sont stables. Si $s\neq 1$, la somme n'est autre que $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{L}'(s),\sigma_J^{\mathbf{L}'(s)}(\boldsymbol{\delta},a)^{\mathbf{L}'(s)},B,\mathbf{f})$ ou encore à

$$I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(transfert(\sigma_J^{\mathbf{L}'(s)}(\boldsymbol{\delta},a)^{\mathbf{L}'(s)}),B,\mathbf{f}).$$

Le transfert commute à l'induction. Donc

$$transfert(\sigma_J^{\mathbf{L}'(s)}(\boldsymbol{\delta},a)^{\mathbf{L}'(s)})=(transfert(\sigma_J^{\mathbf{L}'(s)}(\boldsymbol{\delta},a)))^{\tilde{L}}.$$

Puisque $\tilde{L}\neq\tilde{M}$, on peut appliquer le théorème 1.16 et l'expression ci-dessus devient $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}((transfert(\sigma_J^{\mathbf{L}'(s)}(\boldsymbol{\delta},a)))^{\tilde{L}},\mathbf{f})$. Si $s=1$, la somme en t n'est pas tout-à-fait

$$I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{L}'(s),\sigma_J^{\mathbf{L}'(s)}(\boldsymbol{\delta},a)^{\mathbf{L}'(s)},B,\mathbf{f})$$

car il manque le terme $t=1$. On a $L'(s)=L$ puisque $s=1$. Le terme manquant est par définition $S_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\sigma_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta},a)^{\tilde{L}},B,\mathbf{f})$. On obtient que la contribution de $\tilde{L}$ à l'expression (3) est

$$\sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F}} i_{\tilde{M}}(\tilde{L},\tilde{L}'(s)) \sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'(s)}(B_{\mathcal{O}})} I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(transfert(\sigma_J^{\mathbf{L}'(s)}(\boldsymbol{\delta},a))^{\tilde{L}},B,\mathbf{f})$$

$$-\sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(B_{\mathcal{O}})} S_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\sigma_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta},a)^{\tilde{L}},B,\mathbf{f}).$$

On peut récrire la première somme sous la forme

$$\sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(B_{\mathcal{O}})} \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F};J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'(s)}(B_{\mathcal{O}})} i_{\tilde{M}}(\tilde{L},\tilde{L}'(s))I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}((transfert(\sigma_J^{\mathbf{L}'(s)}(\boldsymbol{\delta},a)))^{\tilde{L}},B,\mathbf{f}).$$

Or

$$\sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F};J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'(s)}(B_{\mathcal{O}})} i_{\tilde{M}}(\tilde{L},\tilde{L}'(s))transfert(\sigma_J^{\mathbf{L}'(s)}(\boldsymbol{\delta},a))=\rho_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta},a)$$

d'après la définition 3.5(1). Donc la contribution de $\tilde{L}$ à l'expression (3) se réduit à

$$(4)\qquad \sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(B_{\mathcal{O}})} \Big(I_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\rho_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta},a)^{\tilde{L}},B,\mathbf{f})-S_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\sigma_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta},a)^{\tilde{L}},B,\mathbf{f})\Big).$$

Supposons maintenant $\tilde{L}=\tilde{G}$. La somme en t est vide si $s=1$ et est réduite au terme $t=s$ si $s\neq 1$. On a dans ce cas $i_{\tilde{G}'(s)}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))=1$. La contribution de $\tilde{G}$ s'écrit plus simplement

$$\sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F},s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s)) \sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(B_{\mathcal{O}})} S^{\mathbf{G}'(s)}(\sigma_J^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta},a)^{\mathbf{G}'(s)},B,\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}).$$

Les intégrales stables n'étant plus pondérées, on n'a plus besoin de faire appel au théorème 1.16 pour obtenir les égalités

$$S^{\mathbf{G}'(s)}(\sigma_J^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta},a)^{\mathbf{G}'(s)},B,\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)})=I^{\tilde{G}}(transfert(\sigma_J^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta},a)^{\mathbf{G}'(s)}),B,\mathbf{f})$$
$$=I^{\tilde{G}}((transfert(\sigma_J^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta},a)))^{\tilde{G}},B,\mathbf{f}).$$

La contribution de $\tilde{G}$ devient

$$\sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F},s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s)) \sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(B_{\mathcal{O}})} I^{\tilde{G}}((transfert(\sigma_J^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta},a)))^{\tilde{G}},B,\mathbf{f}).$$

On la récrit comme ci-dessus

$$\sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})} \sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F},s\neq 1,J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(B_{\mathcal{O}})} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))I^{\tilde{G}}((transfert(\sigma_J^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta},a)))^{\tilde{G}},B,\mathbf{f}).$$

On a

$$\sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F};J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(B_{\mathcal{O}})} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))transfert(\sigma_J^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta},a))=\rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},a)-\sigma_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},a)$$

d'après la définition 3.5(1). La contribution de $\tilde{G}$ à l'expression (3) est donc

$$(5)\qquad \sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}})}\left(I^{\tilde{G}}(\rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},a)^{\tilde{G}},B,\mathbf{f})-I^{\tilde{G}}(\sigma_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},a)^{\tilde{G}},B,\mathbf{f})\right).$$

Considérons enfin l'espace $\tilde{L}=\tilde{M}$. La somme en s disparaît de l'expression (3). La somme en J se réduit au terme $J=\emptyset$. Les termes $\sigma_\emptyset^{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\delta},a)$ sont tous égaux à $\boldsymbol{\delta}$. La contribution de $\tilde{M}$ à l'expression (3) se réduit à la somme en t, qui est alors

$$(6)\qquad I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\sigma_\emptyset^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},a),B,\mathbf{f})-S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\sigma_\emptyset^{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta},a),B,\mathbf{f})$$

par définition de ce dernier terme.

Le membre de droite de (1) est équivalent à la différence entre (2) et la somme de (4), (5) et (6). On voit que c'est l'expression du (i) de l'énoncé. Cela achève la preuve. $\square$

3.8 Termes d'un développement endoscopique

Soient $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ un triplet quelconque, $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$, $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{M}(F)$ et $\mathbf{M}'=(M',\mathcal{M}',\tilde{\zeta})$ une donnée endoscopique de $(M,\tilde{M},\mathbf{a})$, elliptique et relevante. On note $\mathcal{O}'$ la réunion finie des classes de conjugaison stable semi-simples dans $\tilde{M}'(F)$ qui correspondent à $\mathcal{O}$. Rappelons que l'on a un homomorphisme $\xi:A_{\tilde{M}}\to A_{M'}$ dont se déduit un isomorphisme $\xi:\mathfrak{a}_{\tilde{M}}\to\mathfrak{a}_{M'}$.

Soit $\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. Posons simplement $\mathbf{G}'=\mathbf{G}'(\tilde{s})$. On dispose de l'ensemble $\Sigma^G(A_{\tilde{M}})$ de racines, que l'on peut voir comme des formes linéaires sur $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}$, et on a défini l'espace $\Sigma^{G'}(A_{M'},B_{\mathcal{O}'}^{\tilde{G}})$ de formes linéaires sur $\mathfrak{a}_{M'}$. Montrons que

(1) on a $\beta\circ\xi\in\Sigma^G(A_{\tilde{M}})$ pour tout $\beta\in\Sigma^{G'}(A_{M'},B_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}})$.

On fixe $\epsilon\in\mathcal{O}'$ et on applique la construction de la fonction $B_\epsilon^{\tilde{G}}$ faite en 1.11. Pour simplifier, on pose $B=B_\epsilon^{\tilde{G}}$. On suppose que les paires de Borel (B,T) et (B',T') sont telles que $\tilde{M}$ et $\tilde{M}'$ soient standard. L'isomorphisme ξ ci-dessus se déduit d'un isomorphisme $\xi:\mathfrak{t}^\theta\simeq\mathfrak{t}'$. Un élément $\beta\in\Sigma^{G'}(A_{M'},B)$ est la restriction à $\mathfrak{a}_{M'}$ d'un élément $\beta'\in\Sigma^{G'_\epsilon}(T',B)$. Alors $\beta\circ\xi$ est la restriction à $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}$ de $\beta'\circ\xi$. L'élément β' est de la forme $\alpha'/B(\alpha')$, où $\alpha'\in\Sigma^{G'_\epsilon}(T')$. On a rappelé en 1.11 la description de cet ensemble, que l'on a décomposé en cas (a) à (d). Dans le cas (a), on a $\alpha'=N\alpha$, $\alpha'\circ\xi=(N\alpha)\circ\xi=n_\alpha\alpha_{res}$, où α_{res} est la restriction de α à $\mathfrak{t}^\theta$. Puisque $B(\alpha')=n_\alpha$, on obtient $\beta'\circ\xi=\alpha_{res}$. Dans le cas (b), on a $\alpha'=2N\alpha$, $\alpha'\circ\xi=2n_\alpha\alpha_{res}$. Puisque $B(\alpha')=2n_\alpha$, on a encore $\beta'\circ\xi=\alpha_{res}$. Dans le cas (c), on a encore $\alpha'\circ\xi=2n_\alpha\alpha_{res}$. Cette fois, $B(\alpha')=n_\alpha$, d'où $\beta'\circ\xi=2\alpha_{res}$. Mais α est de type 2 donc n_α est pair et l'élément $\bar{\alpha}=\alpha+\theta^{n_\alpha/2}(\alpha)$ est de type 3. On a $\bar{\alpha}_{res}=2\alpha_{res}$, donc $\beta'\circ\xi=\bar{\alpha}_{res}$. Dans le cas (d), on a $\alpha'=N\alpha$, $\alpha'\circ=n_\alpha\alpha_{res}$ et $B(\alpha')=2n_\alpha$, d'où $\beta'\circ\xi=\alpha_{res}/2$. Mais α est de type 3 et il existe une racine $\underline{\alpha}$ de type 2 telle que $\alpha=\underline{\alpha}+\theta^{n_{\underline{\alpha}}/2}(\underline{\alpha})$. On a $\alpha_{res}=2\underline{\alpha}_{res}$, d'où $\beta'\circ\xi=\underline{\alpha}_{res}$. Ainsi $\beta'\circ\xi$ est toujours la restriction à $\mathfrak{t}^\theta$ d'un élément de $\Sigma^G(T)$. Il s'ensuit que $\beta\circ\xi$ est la restriction à $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}$ d'un tel élément. Donc $\beta\circ\xi\in\Sigma^G(A_{\tilde{M}})$. $\square$

Supposons $\mathbf{G}'$ elliptique. L'application $\beta\mapsto\beta\circ\xi$ définit une injection $\Sigma^{G'}(A_{M'},B_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}})\to\Sigma^G(A_{\tilde{M}})$. Il s'en déduit une injection $\mathcal{J}_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'}(B_{\mathcal{O}}^{\tilde{G}})\to\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$, que nous noterons simplement $J'\mapsto J$. Considérons deux tels éléments J' et J tels que $J'\mapsto J$. Pour $u'\in U_{J'}$, la fonction $u'\circ\xi$ appartient à U_J, d'où une injection $U_{J'}\to U_J$. L'application de transfert

$$D_{g\acute{e}om}^{st}(\mathbf{M}',\mathcal{O}')\otimes Mes(M'(F))^*\to D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O})\otimes Mes(M(F))^*$$

commute à l'induction. On en déduit qu'elle se factorise en une application

$$(D^{st}_{géom}(\mathbf{M}',\mathcal{O}')\otimes Mes(M'(F))^*)/Ann^{\tilde{G}',st}_{\mathcal{O}'}\to (D_{géom}(\mathcal{O})\otimes Mes(M(F))^*)/Ann^{\tilde{G}}_{\mathcal{O}}.$$

On l'appelle encore transfert.

Soit $J\in\mathcal{J}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$. On va définir une application

$$\rho^{\tilde{G},\mathcal{E}}_J(\mathbf{M}') : D^{st}_{géom}(\mathbf{M}',\mathcal{O}')\otimes Mes(M'(F))^*\to U_J\otimes (D_{géom}(\mathcal{O})\otimes Mes(M(F))^*)/Ann^{\tilde{G}}_{\mathcal{O}}.$$

Soit $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{géom}(\mathbf{M}',\mathcal{O}')\otimes Mes(M'(F))^*$. On peut considérer la valeur $\rho^{\tilde{G},\mathcal{E}}_J(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta})$ comme un germe d'application de $A_{\tilde{M}}(F)$ dans $(D_{géom}(\mathcal{O})\otimes Mes(M(F))^*)/Ann^{\tilde{G}}_{\mathcal{O}}$ dont on note $\rho^{\tilde{G},\mathcal{E}}_J(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)$ la valeur en un point $a\in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale et proche de 1. On pose

$$\rho^{\tilde{G},\mathcal{E}}_J(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)=\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))$$
$$\sum_{J'\in\mathcal{J}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}_{\tilde{M}'}(B^{\tilde{G}}_{\mathcal{O}'});J'\mapsto J} transfert(\sigma^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{J'}(\boldsymbol{\delta},\xi(a))).$$

Notons que la somme en J' est vide ou réduite à un seul élément. Les considérations qui précédent montrent que $\rho^{\tilde{G},\mathcal{E}}_J(\mathbf{M}')$ prend ses valeurs dans l'espace indiqué. D'après nos hypothèses de récurrence, les termes $\sigma^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{J'}(\boldsymbol{\delta},\xi(a))$ sont stables et on peut bien les transférer, sauf dans le cas où $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ est quasi-déployé et à torsion intérieure et où $\mathbf{M}'=\mathbf{M}$. Dans ce cas, le terme correspondant à $\tilde{s}=1$ pose problème. On le remplace simplement par $\sigma^{\tilde{G}}_J(\boldsymbol{\delta},a)$. Par définition de ce dernier terme, on a dans ce cas $\rho^{\tilde{G},\mathcal{E}}_J(\mathbf{M},\boldsymbol{\delta},a)=\rho^{\tilde{G}}_J(\boldsymbol{\delta},a)$.

Proposition (à prouver). *Pour tout* $J\in\mathcal{J}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$, *tout* $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{géom}(\mathbf{M}',\mathcal{O}')\otimes Mes(M'(F))^*$ *et tout* $a\in A_{\tilde{M}}(F)$ *en position générale et proche de* 1, *on a l'égalité*

$$\rho^{\tilde{G},\mathcal{E}}_J(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)=\rho^{\tilde{G}}_J(transfert(\boldsymbol{\delta}),a).$$

Variante. Supposons $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Fixons un système de fonction B. Il s'en déduit un tel système sur les espaces endoscopiques $\tilde{G}'(s)$ intervenant. En utilisant ces systèmes à la fois sur $\tilde{G}$ et sur ses espaces endoscopiques, on définit la variante $\rho^{\tilde{G},\mathcal{E}}_J(\mathbf{M}')$ pour $J\in\mathcal{J}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(B_{\mathcal{O}})$.

Variante. Supposons $G=\tilde{G}$, $\mathbf{a}=1$ et $\mathcal{O}=\{1\}$. Fixons une fonction B comme en 1.8. On définit de même la variante $\rho^{G,\mathcal{E}}_J(\mathbf{M}')$ pour $J\in\mathcal{J}^G_M(B)$.

3.9 Développement des intégrales orbitales pondérées endoscopiques

Les données sont les mêmes que dans le paragraphe précédent.

Proposition. *Pour tout* $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{géom}(\mathbf{M}',\mathcal{O}')\otimes Mes(M'(F))^*$ *et tout* $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$, *le germe en* 1 *de la fonction*

$$a\mapsto I^{\tilde{G},\mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}',\xi(a)\boldsymbol{\delta},\mathbf{f}),$$

qui est définie pour tout $a\in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale, est équivalent à

$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}} I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\rho_J^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)^{\tilde{L}},\mathbf{f}).$$

Preuve. Supposons d'abord $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure et $\mathbf{M}'=\mathbf{M}$. On vérifie qu'aucun terme ne change si on supprime les exposants $\mathcal{E}$. L'assertion est alors le (ii) de la proposition 3.2. On exclut ce cas.

Posons pour simplifier $a'=\xi(a)$. On a l'égalité

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',a'\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})=\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))S_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(a'\boldsymbol{\delta},B^{\tilde{G}},\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}).$$

Calculons le germe en 1 de cette expression, à équivalence près. D'après nos hypothèses de récurrence, la proposition 3.7 est démontrée pour tous les termes intervenant ici. En l'utilisant, on obtient

$$\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))\sum_{\tilde{L}'_{\tilde{s}}\in\mathcal{L}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(\tilde{M}')}$$
$$\sum_{J'\in\mathcal{J}_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}(B_{\mathcal{O}'}^{\tilde{G}})} S_{\mathbf{L}'_{\tilde{s}}}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\sigma_{J'}^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},a')^{\mathbf{L}'_{\tilde{s}}},B^{\tilde{G}},\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}).$$

On regroupe les $(\tilde{s},\tilde{L}'_{\tilde{s}})$ selon l'espace de Levi $\tilde{L}$ déterminé par $\mathcal{A}_{\tilde{L}}=\mathcal{A}_{\tilde{L}'_{\tilde{s}}}$. Comme dans les démonstrations précédentes, $\tilde{L}'_{\tilde{s}}$ devient $\tilde{L}'(\tilde{s})$. On obtient

$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta}},\mathbf{L}'(\tilde{s})\text{ elliptique}}\sum_{J'\in\mathcal{J}_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}'(\tilde{s})}(B_{\mathcal{O}'}^{\tilde{G}})}$$
$$\sum_{\tilde{t}\in\tilde{s}Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{t}))S_{\mathbf{L}'(\tilde{s})}^{\mathbf{G}'(\tilde{t})}(\sigma_{J'}^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},a')^{\mathbf{L}'(\tilde{s})},B^{\tilde{G}},\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{t})}).$$

On peut décomposer la somme en J' en une somme en les $J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}$ et une somme en les J' tels que $J'\mapsto J$. D'autre part, on a encore

$$i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{t}))=i_{\tilde{M}'}(\tilde{L},\tilde{L}'(\tilde{s}))i_{\tilde{L}'(\tilde{s})}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{t})),$$

et l'expression devient

$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}}\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{L},\tilde{L}'(\tilde{s}))\sum_{J'\in\mathcal{J}_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}'(\tilde{s})}(B_{\mathcal{O}'}^{\tilde{G}}),J'\mapsto J}$$
$$\sum_{\tilde{t}\in\tilde{s}Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{L}'(\tilde{s})}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{t}))S_{\mathbf{L}'(\tilde{s})}^{\mathbf{G}'(\tilde{t})}(\sigma_{J'}^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},a')^{\mathbf{L}'(\tilde{s})},B^{\tilde{G}},\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{t})}).$$

La somme en $\tilde{t}$ n'est autre que $I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{L}'(\tilde{s}),\sigma_{J'}^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},a')^{\mathbf{L}'(\tilde{s})},\mathbf{f})$, ou encore

$$I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(transfert(\sigma_{J'}^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},a')^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}),\mathbf{f}).$$

On a l'égalité

$$transfert(\sigma_{J'}^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},a')^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}) = \Big(transfert(\sigma_{J'}^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},a'))\Big)^{\tilde{L}}.$$

L'expression devient

$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}}\sum_{\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{L})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{L},\tilde{L}'(\tilde{s}))$$

$$\sum_{J'\in\mathcal{J}_{\tilde{M}'}^{\tilde{L}'(\tilde{s})}(B_{\mathcal{O}'}^{\tilde{G}}),J'\mapsto J} I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}\Big(\Big(transfert(\sigma_{J'}^{\mathbf{L}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta},a'))\Big)^{\tilde{L}},\mathbf{f}\Big).$$

Il suffit d'appliquer la définition de 3.8 pour obtenir transformer cette expression en celle de l'énoncé. □

Variante. Supposons $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Fixons un système de fonction B. On a une proposition analogue. La formule de l'énoncé prend la forme

$$\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(B_{\mathcal{O}})} I_{\tilde{L}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\rho_J^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)^{\tilde{L}},B,\mathbf{f}).$$

Variante. Supposons $G=\tilde{G}$, $\mathbf{a}=1$ et $\mathcal{O}=\{1\}$. Fixons une fonction B comme en 1.8. On a une proposition analogue. La formule de l'énoncé prend la forme

$$\sum_{L\in\mathcal{L}(M)}\sum_{J\in\mathcal{J}_M^L(B)} I_L^{G,\mathcal{E}}(\rho_J^{L,\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)^L,B,\mathbf{f}).$$

3.10 Termes ρ_J et induction

Soient $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ un triplet quelconque, $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$, $\tilde{R}$ un espace de Levi de $\tilde{M}$ et $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison semi-simple dans $\tilde{R}(F)$. On note $\mathcal{O}^{\tilde{M}}$ la classe de conjugaison dans $\tilde{M}(F)$ qui contient $\mathcal{O}$. On rappelle l'homomorphisme d'induction

$$\begin{array}{ccc} D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O})\otimes Mes(R(F))^* & \to & D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}^{\tilde{M}})\otimes Mes(M(F))^* \\ \boldsymbol{\gamma} & \mapsto & \boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}} \end{array}$$

Rappelons que $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ est l'ensemble des classes d'équivalence d'ensembles $\underline{\alpha}=\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ où les α_i sont des éléments linéairement indépendants de $\Sigma^G(A_{\tilde{M}})$ et où $n=a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{G}}$. Deux ensembles sont équivalents s'ils engendrent le même $\mathbb{Z}$-module. Soit $\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R})$ tel que

$$(1)\qquad \mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}=\mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{M}}\oplus\mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}.$$

Alors de l'injection $A_{\tilde{M}}\to A_{\tilde{R}}$ se déduit une application injective $\Sigma^L(A_{\tilde{R}})\to\Sigma^G(A_{\tilde{M}})$. Il s'en déduit une injection $\mathcal{J}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}\to\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ par laquelle on identifie le premier ensemble à un sous-ensemble du second. A un élément $J\in\mathcal{J}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}$ sont associés deux espaces U_J, l'un de germes de fonctions sur $A_{\tilde{R}}(F)$, l'autre de germes de fonctions sur $A_{\tilde{M}}(F)$. Ce dernier est l'ensemble des restrictions des éléments du premier.

Lemme. *Soient* $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$, $\boldsymbol{\gamma} \in D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}) \otimes Mes(R(F))^*$ *et* $a \in A_{\tilde{M}}(F)$ *en position générale et assez proche de* 1. *On a l'égalité*

$$\rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}}, a) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{R}), J \in \mathcal{J}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}} d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}, \tilde{L}) \rho_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}, a)^{\tilde{M}}.$$

Preuve. On fixe des mesures de Haar sur tous les groupes intervenant. Par linéarité, on peut supposer que $\boldsymbol{\gamma}$ est une intégrale orbitale associée à un élément $u\eta \in \tilde{R}(F)$, où $\eta \in \tilde{R}(F)$ est semi-simple et $u \in R_\eta(F)$ est unipotent. Alors $\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}}$ est une combinaison linéaire

$$\sum_{j=1,...,k} c_k I^{\tilde{M}}(v_j\eta, \omega, .)$$

d'intégrales orbitales associées à des éléments $v_j\eta$, où $v_j \in M_\eta(F)$ appartient à l'orbite induite de celle de u. On pose $\boldsymbol{\gamma}_j = I^{\tilde{M}}(v_j\eta, \omega, .)$. En appliquant la définition 3.2(5), on obtient

$$(2) \qquad \rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}}, a) = \sum_{j=1,...,k} c_j \sum_{\underline{\alpha} \in J} m(\underline{\alpha}, v_j\eta) sgn(\underline{\alpha}, v_j\eta) u_{\underline{\alpha}}(a) \boldsymbol{\gamma}_j.$$

Considérons $\underline{\alpha} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \in J$. Pour tout $i = 1, ..., n$, fixons une "coracine" $\check{\alpha}_i$ que nous normalisons par la condition $< \alpha_i, \check{\alpha}_i >= 1$ (sic!). Notons m le volume du quotient de $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ par le $\mathbb{Z}$-module engendré par ces $\check{\alpha}_i$, pour $i = 1, ..., n$. Le terme $\rho^{\tilde{G}}(\alpha_i, v_j\eta)$ défini en 1.5 est proportionnel à $\check{\alpha}_i$. Il résulte des définitions que

$$(3) \qquad m(\underline{\alpha}, v_j\eta) sgn(\underline{\alpha}, v_j\eta) = m \prod_{i=1,...,n} < \alpha_i, \rho(\alpha_i, v_j\eta) > .$$

Pour tout i, appliquons la relation 1.7(11) :

$$\rho(\alpha_i, v_j\eta) = \sum_{\beta_i \in \Sigma^{\tilde{G}}(A_{\tilde{R}}), \beta_{i,\tilde{M}} = \alpha_i} \rho(\beta_i, v\eta)_{\tilde{M}}.$$

Notons $\underline{J'_\alpha}$ l'ensemble des ensembles $\underline{\beta} = \{\beta_1, ..., \beta_n\}$ d'éléments de $\Sigma^{\tilde{G}}(A_{\tilde{R}})$ tels que $\beta_{i,\tilde{M}} = \alpha_i$ pour tout i (en numérotant convenablement les éléments de cet ensemble). On obtient

$$m(\underline{\alpha}, v_j\eta) sgn(\underline{\alpha}, v_j\eta) = \sum_{\underline{\beta} \in \underline{J'_\alpha}} m \prod_{i=1,...,n} < \alpha_i, \rho(\beta_i, u\eta) > .$$

Pour chaque ensemble $\underline{\beta} = \{\beta_1, ..., \beta_n\} \in \underline{J'_\alpha}$, définissons l'espace de Levi $\tilde{L}_{\underline{\beta}}$ de sorte que $\mathcal{A}_{\tilde{L}_{\underline{\beta}}}$ soit l'intersection des annulateurs des β_i dans $\mathcal{A}_{\tilde{R}}$. Alors $\underline{\beta}$ appartient à une unique classe $J_{\underline{\beta}} \in \mathcal{J}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}_{\underline{\beta}}}$. Il résulte des définitions que la relation (1) est vérifiée pour $\tilde{L} = \tilde{L}_{\underline{\beta}}$ et que la classe $J_{\underline{\beta}}$ s'envoie sur J par l'injection $\mathcal{J}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}_{\underline{\beta}}} \subset \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. On introduit des coracines $\check{\beta}_i$ comme ci-dessus. On a

$$< \alpha_i, \rho(\beta_i, u\eta) >=< \alpha_i, \check{\beta}_i >< \beta_i, \rho(\beta_i, u\eta) >,$$

d'où

$$m(\underline{\alpha}, v_j\eta) sgn(\underline{\alpha}, v_j\eta) = \sum_{\underline{\beta} \in \underline{J'_\alpha}} m m'_{\underline{\beta}} \prod_{i=1,...,n} < \beta_i, \rho(\beta_i, u\eta) >,$$

où
$$m'_{\underline{\beta}}=\prod_{i=1,...,n}<\alpha_i,\check{\beta}_i> .$$
Le produit $mm'_{\underline{\beta}}$ est le volume du quotient de $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ par le $\mathbb{Z}$-module engendré par les $\check{\beta}_{i,\tilde{M}}$ pour $i=1,...,n$. Un calcul simple montre que
$$mm'_{\underline{\beta}}=d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}_{\underline{\beta}})m_{\underline{\beta}},$$
où $m_{\underline{\beta}}$ est le volume du quotient de $\mathcal{A}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}_{\underline{\beta}}}$ par le $\mathbb{Z}$-module engendré par les $\check{\beta}_i$. D'où
$$m(\underline{\alpha},v_j\eta)sgn(\underline{\alpha},v_j\eta)=\sum_{\underline{\beta}\in\underline{J}'_{\underline{\alpha}}}d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M}\tilde{L}_{\underline{\beta}})m_{\underline{\beta}}\prod_{i=1,...,n}<\beta_i,\rho(\beta_i,u\eta)> .$$
Par une égalité similaire à (3), cette expression devient
$$m(\underline{\alpha},v_j\eta)sgn(\underline{\alpha},v_j\eta)=\sum_{\underline{\beta}\in\underline{J}'_{\underline{\alpha}}}d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}_{\underline{\beta}})m(\underline{\beta},u\eta)sgn(\underline{\beta},u\eta).$$
D'autre part, on a $u_{\underline{\alpha}}(a)=u_{\underline{\beta}}(a)$ pour tout $\underline{\beta}\in\underline{J}'_{\underline{\alpha}}$. L'égalité (2) devient
$$\rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}},a)=\sum_{j=1,...,k}c_j\sum_{\underline{\alpha}\in J}\sum_{\underline{\beta}\in\underline{J}'_{\underline{\alpha}}}d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}_{\underline{\beta}})m(\underline{\beta},u)sgn(\underline{\beta},u)u_{\underline{\beta}}(a)\boldsymbol{\gamma}_j$$
$$=\sum_{\underline{\alpha}\in J}\sum_{\underline{\beta}\in\underline{J}'_{\underline{\alpha}}}d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}_{\underline{\beta}})m(\underline{\beta},u)sgn(\underline{\beta},u)u_{\underline{\beta}}(a)\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}}.$$
Pour un espace de Levi $\tilde{L}$ vérifiant (1), on vérifie que la réunion sur les $\underline{\alpha}\in J$ des $\underline{\beta}\in\underline{J}'_{\underline{\alpha}}$ tels que $\tilde{L}_{\underline{\beta}}=\tilde{L}$ est vide si $J\notin\mathcal{J}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}$. Sinon, c'est l'ensemble des $\underline{\beta}\in J$, où J est vu comme un élément de $\mathcal{J}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}$. D'où
$$\rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}},a)=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R}),J\in\mathcal{J}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}}d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L})\sum_{\underline{\beta}\in J}m(\underline{\beta},u)sgn(\underline{\beta},u)u_{\underline{\beta}}(a)\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}}.$$
Par une égalité similaire à (2), on a pour tout $\tilde{L}$ intervenant ci-dessus
$$\rho_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma},a)=\sum_{\underline{\beta}\in J}m(\underline{\beta},u)sgn(\underline{\beta},u)u_{\underline{\beta}}(a)\boldsymbol{\gamma}.$$
L'égalité précédente devient
$$\rho_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{M}},a)=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R}),J\in\mathcal{J}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}}d_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L})\rho_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma},a)^{\tilde{M}}.$$
Cela prouve le lemme. $\square$

Variante. Supposons $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure et fixons un système de fonctions B comme en 1.9. On dispose de l'ensemble $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}^{\tilde{M}}})$. Les constructions s'adaptent pour cet ensemble et on a un lemme similaire.

3.11 Termes σ_J et induction

Soient $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ un triplet quasi-déployé et à torsion intérieure, B un système de fonctions comme en 1.9, $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$, $\tilde{R}$ un espace de Levi de $\tilde{M}$ et $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{R}(F)$. On note $\mathcal{O}^{\tilde{M}}$ la classe de conjugaison stable dans $\tilde{M}(F)$ qui contient $\mathcal{O}$.

Lemme. *Soient $J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}^{\tilde{M}}})$, $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{géom}(\mathcal{O})\otimes Mes(R(F))^*$ et $a\in A_M(F)$ en position générale et assez proche de 1. On a l'égalité*

$$\sigma_J^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}^{\tilde{M}},a)=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R}),J\in\mathcal{J}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}}e_{\tilde{R}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L})\sigma_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\delta},a)^{\tilde{M}}.$$

En utilisant le lemme précédent, la démonstration est similaire à celle du (ii) de la proposition 1.14.

3.12 Termes $\rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta},a)$ et induction

Soient $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ un triplet quelconque, $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$, $\mathbf{M}'=(M',\mathcal{M}',\tilde{\zeta})$ une donnée endoscopique elliptique et relevante de $(M,\tilde{M},\mathbf{a})$ et R' un groupe de Levi de M' qui est relevant. On construit comme en [I] 3.4 un espace de Levi $\tilde{R}$ de $\tilde{M}$ qui lui correspond et une donnée endoscopique $\mathbf{R}'$ de $(R,\tilde{R},\mathbf{a})$ qui est elliptique et relevante. Soit $\mathcal{O}$ une classe de conjugaison stable semi-simple dans $\tilde{R}(F)$. On note $\mathcal{O}'$ la réunion des classes de conjugaison stable dans $\tilde{R}'(F)$ qui correspondent à $\mathcal{O}$.

Lemme. *Soient $J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$, $\boldsymbol{\delta}\in D_{géom}(\mathbf{R}',\mathcal{O}')\otimes Mes(R'(F))^*$ et $a\in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale et proche de 1. On a l'égalité*

$$\rho_J^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{M}'},a)=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{R}),J\in\mathcal{J}_{\tilde{R}}^{\tilde{L}}}d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L})\rho_J^{\tilde{L},\mathcal{E}}(\mathbf{R}',\boldsymbol{\delta},a)^{\tilde{M}}.$$

La démonstration est similaire à celle du (i) de la proposition 1.14.

Variante. Supposons $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Fixons un système de fonctions B comme en 1.9. On a un lemme similaire en remplaçant l'ensemble $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ par $\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(B_{\mathcal{O}^{\tilde{M}}})$.

4 Le cas non ramifié

4.1 Intégrales orbitales pondérées de la fonction caractéristique d'un espace hyperspécial

Dans toute cette section, on suppose $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ non ramifié et p grand. Précisément, on impose les hypothèses (1) à (4) de [I] 6.1 ainsi que l'hypothèse (Hyp) de cette référence. Le groupe $G(F)$ est muni d'une mesure canonique pour laquelle $mes(K)=1$ pour tout sous-groupe compact hyperspécial K de $G(F)$ (rappelons que deux tels sous-groupes sont conjugués par le groupe $G_{AD}(F)$)). On munit $G(F)$ de cette mesure et on se débarrasse ainsi des espaces de mesures intervenant dans les sections précédentes. On fera de même pour les autres groupes non ramifiés qui interviendront.

On fixe un sous-espace hyperspécial $\tilde{K}$ de $\tilde{G}(F)$, on note K le sous-groupe hyperspécial de $G(F)$ associé. On note $\mathbf{1}_{\tilde{K}}$ la fonction caractéristique de $\tilde{K}$. Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ tel que M soit en bonne position relativement à K. On définit une forme linéaire $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(.,\tilde{K})$ sur $D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F),\omega)$ par

$$r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\tilde{K}) = J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{1}_{\tilde{K}})$$

pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F),\omega)$.

Soit $\tilde{Q} = \tilde{L}U_Q \in \mathcal{F}(\tilde{M})$. On a l'égalité $(\mathbf{1}_{\tilde{K}})_{\tilde{Q},\omega} = \mathbf{1}_{\tilde{K}^{\tilde{L}}}$, où $\tilde{K}^{\tilde{L}} = \tilde{K} \cap \tilde{L}(F)$. En particulier, cette fonction ne dépend que de $\tilde{L}$. La formule habituelle de descente des intégrales orbitales donne donc la formule suivante. Soient $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$ et $\boldsymbol{\gamma} \in D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F),\omega)$. On a l'égalité

$$(1) \qquad r_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}^{\tilde{L}},\tilde{K}) = \sum_{\tilde{L}' \in \mathcal{L}(\tilde{M})} d_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{L},\tilde{L}') r_{\tilde{M}}^{\tilde{L}'}(\boldsymbol{\gamma},\tilde{K}^{\tilde{L}'}).$$

4.2 L'avatar stable

On suppose ici $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Pour tout espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$, nous allons définir une forme linéaire $s_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(.,\tilde{K})$ sur $D_{g\acute{e}om}^{st}(\tilde{M}(F))$. Comme les intégrales orbitales pondérées, elle dépend de la mesure sur $\mathcal{A}_M^G$ fixée en 1.2. La définition se faisant par récurrence, on doit commencer par quelques formalités.

Notre forme linéaire vérifiera la propriété

(1) $s_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(.,\tilde{K})$ ne dépend que de la classe de conjugaison de $\tilde{K}$ par $G_{AD}(F)$.

Remarquons que deux sous-groupes hyperspéciaux de $G(F)$ sont toujours conjugués par $G_{AD}(F)$ mais ce n'est pas le cas pour deux sous-espaces hyperspéciaux de $\tilde{G}(F)$. Pour deux tels sous-espaces $\tilde{K}'$ et $\tilde{K}''$, on a seulement : il existe $g \in G_{AD}(F)$ et $z \in Z(G;F)$ de sorte que $\tilde{K}'' = z\, ad_g(\tilde{K}')$.

Notre forme linéaire vérifiera aussi la propriété

(2) $s_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\tilde{K}) = 0$ si le support de $\boldsymbol{\delta}$ ne coupe pas $\tilde{K}$.

Considérons des extensions compatibles

$$1 \to C_1 \to G_1 \to G \to 1 \text{ et } \tilde{G}_1 \to \tilde{G}$$

où C_1 est un tore central induit, G_1 est non ramifié et $\tilde{G}_1$ est à torsion intérieure. Soit λ_1 un caractère non ramifié de $C_1(F)$. On fixe un espace hyperspécial $\tilde{K}_1$ de $\tilde{G}_1(F)$ se projetant sur $\tilde{K}$. On a $\mathcal{A}_{M_1}^{G_1} \simeq \mathcal{A}_M^G$ et on choisit pour mesure sur le premier espace l'image par cet isomorphisme de la mesure fixée sur le second. On suppose définie la forme linéaire $s_{\tilde{M}_1}^{\tilde{G}_1}(.,\tilde{K}_1)$ sur $D_{g\acute{e}om}^{st}(\tilde{M}_1(F))$, vérifiant la propriété (2). On définit une forme linéaire $s_{\tilde{M}_1,\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(.,\tilde{K}_1)$ sur $D_{g\acute{e}om,\lambda_1}^{st}(\tilde{M}_1(F))$ de la façon suivante. Soit $\boldsymbol{\delta} \in D_{g\acute{e}om,\lambda_1}^{st}(\tilde{M}_1(F))$. On choisit un élément $\dot{\boldsymbol{\delta}} \in D_{g\acute{e}om}^{st}(\tilde{M}_1(F))$ qui s'envoie sur $\boldsymbol{\delta}$ par l'application 1.10(3). On pose

$$s_{\tilde{M}_1,\lambda_1}^{\tilde{G}_1}(\boldsymbol{\delta},\tilde{K}_1) = \int_{C_1(F)} s_{\tilde{M}_1}^{\tilde{G}_1}(\dot{\boldsymbol{\delta}}^c,\tilde{K}_1)\lambda_1(c)^{-1}\, dc.$$

La propriété (2) assure que cette intégrale est à support compact.

On note comme toujours $\mathbf{M}$ la donnée endoscopique "maximale" de $(M, \tilde{M})$. Soit $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$, avec $s \neq 1$. On en déduit une donnée endoscopique $\mathbf{G}'(s) = (G'(s), \mathcal{G}'(s), s)$ de $(G, \tilde{G})$, qui est non ramifiée. Supposons-la elliptique. Alors $\mathcal{A}_M^{G'(s)} \simeq \mathcal{A}_M^G$ et on choisit pour mesure sur le premier espace l'image par cet isomorphisme de la mesure fixée sur le second. On va définir une forme linéaire $s_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(., \tilde{K})$ sur $D_{g\acute{e}om}^{st}(\mathbf{M})$. On associe à l'espace $\tilde{K}$ un espace hyperspécial $\tilde{K}'(s)$ de $\tilde{G}'(s)$, dont la classe de conjugaison par $G'(s)_{AD}(F)$ est uniquement déterminée, cf. [I] 6.2. On choisit des données auxiliaires $G'_1(s)$, $\tilde{G}'_1(s)$, $C_1(s)$, $\hat{\xi}_1(s)$ non ramifiées (cf. [I] 6.3). On choisit un sous-espace hyperspécial $\tilde{K}'_1(s)$ de $\tilde{G}'_1(s)$ se projetant sur $\tilde{K}'(s)$. On note $\Delta_1(s)$ le facteur de transfert associé à ce sous-espace, cf. [I] 6.3. Soit $\boldsymbol{\delta} \in D_{g\acute{e}om}^{st}(\mathbf{M})$. Par ce choix de facteur de transfert, cette distribution s'identifie à un élément $\boldsymbol{\delta}_1(s) \in D_{g\acute{e}om,\lambda_1}^{st}(\tilde{M}'_1(s))$. Puisqu'on a supposé $s \neq 1$, on peut supposer par récurrence que la forme linéaire $s_{\tilde{M}'_1(s)}^{\tilde{G}'_1(s)}(., \tilde{K}'_1(s))$ est bien définie. Un calcul formel utilisant par récurrence la propriété (1) montre que le terme

$$s_{\tilde{M}'_1(s)}^{\tilde{G}'_1(s)}(\boldsymbol{\delta}_1(s), \tilde{K}'_1(s))$$

ne dépend pas des choix de données auxiliaires. On le note $s_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, \tilde{K})$, ce qui définit la forme linéaire $s_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(., \tilde{K})$.

On a défini au paragraphe précédent la forme linéaire $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(., \tilde{K})$ sur $D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F))$, sous l'hypothèse que M était en bonne position relativement à K. Montrons que :

(3) sa restriction à $D_{g\acute{e}om}^{st}(\tilde{M}(F))$ ne dépend que de la classe de conjugaison de $\tilde{K}$ par $G_{AD}(F)$.

Soit $g \in G_{AD}(F)$, posons $\tilde{K}' = ad_g(\tilde{K})$, $K' = ad_g(K)$ et supposons que M est encore en bonne position relativement à K'. On peut fixer deux sous-tores maximaux T et T' de M, définis sur F et maximalement déployés, de sorte que K, resp. K', soit le fixateur d'un point hyperspécial dans l'appartement de l'immeuble de G associé à T, resp. T'. Les tores T et T' sont conjugués par $M(F)$. On peut donc fixer $m \in M(F)$ tel que $ad_m(T) = T'$. Posons $K'' = ad_{m^{-1}}(K')$. Alors K et K'' sont les fixateurs de points hyperspéciaux dans l'appartement de l'immeuble de G associé à T. On sait que deux tels points se déduisent l'un de l'autre par l'action d'un élément du normalisateur de T dans $G_{AD}(F)$. Puisque de plus, le normalisateur de T dans K se projette surjectivement sur le groupe de Weyl de T, nos deux points se déduisent en fait l'un de l'autre par l'action d'un élément de $T_{ad}(F)$. Soit donc $t \in T_{ad}(F)$ tel que $K'' = ad_t(K)$. Alors $ad_{mt}(K) = K'$, donc $ad_{g^{-1}mt}$ conserve K, donc $g^{-1}mt \in K_{ad}$. Dans notre situation à torsion intérieure, cela entraîne que $ad_{g^{-1}mt}$ conserve $\tilde{K}$. Donc $\tilde{K}' = ad_{mt}(\tilde{K})$. Cela montre qu'il existe $x \in M_{ad}(F)$ tel que $\tilde{K}' = ad_x(\tilde{K})$. Par simple transport de structure, on a l'égalité

$$r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \tilde{K}) = r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(ad_x(\boldsymbol{\gamma}), \tilde{K}')$$

pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F))$. Mais l'action par conjugaison de $M_{ad}(F)$ se restreint en l'identité sur les distributions stables. Donc

$$r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \tilde{K}) = r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \tilde{K}')$$

pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D_{g\acute{e}om}^{st}(\tilde{M}(F))$. Cela prouve (3). $\square$

Grâce à (3), on peut étendre la définition de la restriction de $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(., \tilde{K})$ à $D_{g\acute{e}om}^{st}(\tilde{M}(F))$ au cas où M n'est plus supposé en bonne position relativement à $\tilde{K}$: on choisit $g \in$

$G_{AD}(F)$ tel que M soit en bonne position relativement à $ad_g(K)$; pour $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\tilde{M}(F))$, on pose $r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \tilde{K}) = r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, ad_g(\tilde{K}))$. L'assertion (3) assure que cela ne dépend pas du choix de g.

On peut maintenant définir notre forme linéaire $s^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(., \tilde{K})$. Pour $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\tilde{M}(F))$, on pose

$$(4) \qquad s^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \tilde{K}) = r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \tilde{K}) - \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, s \neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) s^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\delta}, \tilde{K}).$$

La vérification des propriétés (1) et (2) est immédiate par récurrence, et grâce à (3).

Notons une autre propriété formelle de notre forme linéaire. Le groupe $Z(G; F)$ agit par multiplication sur $\tilde{G}(F)$, donc aussi sur $C^\infty_c(\tilde{M}(F))$ (précisément $f^z(\gamma) = f(z\gamma)$) puis sur $D_{géom}(\tilde{M}(F))$, en conservant l'espace des distributions stables. Pour $z \in Z(G; F)$ et $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{géom}(\tilde{M}(F))$, on a l'égalité

$$s^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}^z, \tilde{K}) = s^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, z\tilde{K}).$$

4.3 L'avatar endoscopique

On revient au cas où $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est quelconque (mais non ramifié comme dans toute la section). Soient $\tilde{M}$ un Levi de $\tilde{G}$ et $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$ une donnée endoscopique elliptique et non ramifiée de $\tilde{M}$. Pour $\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}$, on dispose de la donnée endoscopique $\mathbf{G}'(\tilde{s}) = (G'(\tilde{s}), \mathcal{G}'(\tilde{s}), \tilde{s})$ de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$, qui est non ramifiée. Supposons-la elliptique. Alors $\mathcal{A}^{G'(\tilde{s})}_{M'} \simeq \mathcal{A}^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$ et on choisit pour mesure sur le premier espace l'image par cet isomorphisme de la mesure fixée sur le second. On définit une forme linéaire $s^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(., \tilde{K})$ sur $D^{st}_{géom}(\mathbf{M}')$ de la même façon qu'au paragraphe précédent. C'est-à-dire que l'on choisit des données auxiliaires non ramifiées $G'_1(\tilde{s})$, $\tilde{G}'_1(\tilde{s})$, $C_1(s)$, $\hat{\xi}_1(s)$. On fixe un sous-espace hyperspécial $\tilde{K}'_1(\tilde{s})$ de $\tilde{G}'_1(\tilde{s}; F)$ se projetant sur un espace $\tilde{K}'(\tilde{s})$ de $\tilde{G}'(\tilde{s}; F)$ associé à $\tilde{K}$. On utilise le facteur de transfert associé à cet espace. Ainsi, un élément $\boldsymbol{\delta}' \in D^{st}_{géom}(\mathbf{M}')$ s'identifie à un élément $\boldsymbol{\delta}'_1(\tilde{s}) \in D^{st}_{géom, \lambda_1(\tilde{s})}(\tilde{M}'_1(\tilde{s}; F))$. On pose

$$s^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}', \tilde{K}) = s_{\tilde{M}'_1(\tilde{s}), \lambda_1}(\boldsymbol{\delta}'_1(\tilde{s}), \tilde{K}'_1(\tilde{s})).$$

Cela ne dépend pas des choix de données auxiliaires.

Cela étant, on définit une forme linéaire $r^{\tilde{G}, \mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', ., \tilde{K})$ sur $D^{st}_{géom}(\mathbf{M}')$ par l'égalité

$$(1) \qquad r^{\tilde{G}, \mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}', \tilde{K}) = \sum_{\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}'(\tilde{s})) s^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}', \tilde{K}).$$

4.4 Le lemme fondamental pondéré

Théorème. *Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ en bonne position relativement à K. Soit $\mathbf{M}'$ une donnée endoscopique elliptique et non ramifiée de $\tilde{M}$. Pour $\boldsymbol{\delta}' \in D^{st}_{géom}(\mathbf{M}')$, on a l'égalité*

$$r^{\tilde{G}, \mathcal{E}}_{\tilde{M}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}', \tilde{K}) = r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(transfert(\boldsymbol{\delta}'), \tilde{K}).$$

Supposons le support de $\boldsymbol{\delta}'$ formé d'éléments semi-simples fortement $\tilde{G}$-réguliers. Dans ce cas, l'assertion est le lemme fondamental pondéré sous sa forme usuelle. Elle est maintenant prouvée d'après [W3] théorème 3.8. Ce théorème était conditionnel, mais les conditions imposées sont levées par les résultats de Ngo Bao Chau et ceux de Chaudouard et Laumon, bien que ces derniers ne soient pas encore publiés en toute généralité. La suite de la section est consacrée à la suppression de l'hypothèse faite ci-dessus sur le support de $\boldsymbol{\delta}'$. On suppose fixés $\tilde{M}$ et $\mathbf{M}'$ comme dans l'énoncé.

4.5 Développement en germes

Soit $\mathcal{O} \subset \tilde{M}(F)$ une réunion finie de classes de conjugaison semi-simples. La proposition 2.3 définit des germes $g^{\tilde{L}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}$ pour tout $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$. D'après [A1], proposition 9.1, les intégrales pondérées non ω-équivariantes vérifient le même développement que leurs versions ω-équivariantes, avec les mêmes germes. En particulier, on a

$$(1) \qquad r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \tilde{K}) = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} r^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(g^{\tilde{L}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}), \tilde{K})$$

pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F), \omega)$ assez proche de $\tilde{C}$.

Supposons $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure. Soit $\mathcal{O} \subset \tilde{M}(F)$ une réunion finie de classes de conjugaison stable. Supposons que $\mathcal{O}$ soit formée d'éléments $\tilde{G}$-équisinguliers. Montrons que l'on a l'égalité

$$(2) \qquad s^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \tilde{K}) = s^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(g^{\tilde{M}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta}), \tilde{K})$$

pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{g\acute{e}om}(\tilde{M}(F))$ assez proche de $\mathcal{O}$. Remarquons que, d'après le lemme 2.2, $g^{\tilde{M}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta})$ est stable, le membre de droite ci-dessus est donc défini.

Preuve. On utilise la définition 4.2(4). En raisonnant par récurrence, on peut supposer que, pour $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$, $s \neq 1$, on a l'égalité

$$s^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\delta}, \tilde{K}) = s^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{M}}(g^{\tilde{M}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta}), \tilde{K})$$

pourvu que $\boldsymbol{\delta}$ soit assez proche de $\mathcal{O}$. L'hypothèse faite sur $\mathcal{O}$ et la relation 2.3(1) entraînent que le développement (1) se simplifie en

$$r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}, \tilde{K}) = r^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(g^{\tilde{M}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta}), \tilde{K}).$$

Mais alors le membre de droite de la relation 4.2(4) pour l'élément $\boldsymbol{\delta}$ coïncide avec la même expression relative à l'élément $g^{\tilde{M}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta})$, donc avec $s^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(g^{\tilde{M}}_{\tilde{M},\mathcal{O}}(\boldsymbol{\delta}), \tilde{K})$. $\square$

Revenons au cas général, soit $\mathcal{O}'$ une classe de conjugaison stable d'éléments semi-simples dans $\tilde{M}'(F)$. Il lui correspond une classe de conjugaison par $M(\bar{F})$ dans $\tilde{M}(\bar{F})$. Supposons que cette classe soit formée d'éléments $\tilde{G}$-équisinguliers. Alors

(3) l'assertion du théorème 4.4 est vérifiée pour tout $\boldsymbol{\delta}' \in D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}') \cap D_{g\acute{e}om}(\mathcal{O}')$.

Preuve. Le lemme 2.2 assure que l'on peut trouver $\boldsymbol{\delta}'_{reg} \in D^{st}_{g\acute{e}om,\tilde{G}-reg}(\mathbf{M}')$, aussi proche que l'on veut de $\mathcal{O}'$, de sorte que $g^{\mathbf{M}'}_{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}'_{reg}) = \boldsymbol{\delta}'$. En fait, en reprenant les démonstrations, on voit que l'on peut supposer le support de $\boldsymbol{\delta}'_{reg}$ en position générale, en particulier $\tilde{G}$-régulier. Considérons la définition 4.3(1). Notons que l'hypothèse sur $\mathcal{O}'$ entraîne que, pour tout $\tilde{s}$ y intervenant, $\mathcal{O}'$ est formé d'éléments $\tilde{G}'(\tilde{s})$-équisinguliers. La relation (2) ci-dessus entraîne alors l'égalité

$$r_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}',\tilde{K})=r_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}'_{reg},\tilde{K}).$$

Comme en l'a dit en 4.4, le théorème est déjà connu pour $\boldsymbol{\delta}'_{reg}$. Le membre de droite ci-dessus est donc égal à $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}'_{reg}),\tilde{K})$. En appliquant (1), qui se simplifie grâce à l'hypothèse sur $\mathcal{O}'$, c'est aussi $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(g_{\tilde{M}}^{\tilde{M}}(transfert(\boldsymbol{\delta}'_{reg})),\tilde{K})$. On a vu en 2.6 que

$$g_{\tilde{M}}^{\tilde{M}}(transfert(\boldsymbol{\delta}'_{reg}))=transfert(g_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{M}'}(\boldsymbol{\delta}'_{reg})),$$

d'où

$$g_{\tilde{M}}^{\tilde{M}}(transfert(\boldsymbol{\delta}'_{reg}))=transfert(\boldsymbol{\delta}').$$

On obtient $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}',\tilde{K})=r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}'),\tilde{K})$, comme on le voulait. $\square$

4.6 Un espace de germes sous hypothèses sur p

On a défini en 3.1 un espace de germes U_J pour tout $J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. On pose

$$U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M})}\sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}}U_J \text{ et } U_{\tilde{M}}^{\tilde{G},+}=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{M}}\sum_{J\in\mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}}U_J.$$

Rappelons que, pour $J=\emptyset$, on a $U_\emptyset=\mathbb{C}$. Donc $U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}=\mathbb{C}+U_{\tilde{M}}^{\tilde{G},+}$.

Lemme. *Supposons $p\neq 2,3,5$. Alors les espaces $\mathbb{C}$ et $U_{\tilde{M}}^{\tilde{G},+}$ sont en somme directe.*

Remarque. L'hypothèse faite sur p en 5.1 entraîne $p\neq 2,3,5$. Mais cette dernière condition est suffisante ici.

Preuve. On descend les fonctions à l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}(F)$ comme en 3.1 et on utilise les notations de ce paragraphe. Soit

$$u=\sum_{\underline{\alpha}}c_{\underline{\alpha}}u_{\underline{\alpha}}$$

une combinaison linéaire de fonctions $u_{\underline{\alpha}}$, où $\underline{\alpha}=\{\alpha_i;i=1,...,n\}$ décrit les ensembles formés d'éléments linéairement indépendants de $\Sigma(A_{\tilde{M}})$. Supposons $u=0$. On doit alors prouver que $c_\emptyset=0$ (rappelons que $u_\emptyset$ est la fonction constante de valeur 1). On raisonne par récurrence sur $a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{G}}$. L'assertion est triviale si ce nombre est nul, autrement dit si $\tilde{M}=\tilde{G}$, puisqu'alors u se réduit à $c_\emptyset u_\emptyset$. Supposons $a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{G}}>0$, fixons un élément $\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})$ et notons $\Delta_{\tilde{P}}$ l'ensemble de racines simples associé. Fixons $\beta\in\Delta_{\tilde{P}}$. Il lui est associé un espace de Levi $\tilde{L}$, maximal parmi les espaces de Levi propres de $\tilde{G}$, de sorte que $\Delta_{\tilde{P}}\cap\tilde{L}=\Delta_{\tilde{P}}-\{\beta\}$. Notons $u^{\tilde{L}}$ la sous-somme de u, où on ne conserve que les $\underline{\alpha}=\{\alpha_i;i=1,...,n\}$ tels que $\alpha_i\in\Sigma^{\tilde{L}}(A_{\tilde{M}})$ pour tout i. Elle contient le terme constant $c_\emptyset u_\emptyset$ et appartient à $U_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}$. On va prouver que $u^{\tilde{L}}=0$. L'hypothèse de récurrence permettra alors de conclure que $c_\emptyset = 0$. Puisque $u^{\tilde{L}}$ est invariante par translations par $\mathfrak{a}_{\tilde{L}}(F)$, il suffit de prouver qu'elle est nulle sur $\mathfrak{a}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(F)$. Fixons un élément $H^{\tilde{L}}$ de cet espace, ainsi qu'un élément H_β de $\mathfrak{a}_{\tilde{L}}(F)$ tel que $\beta(H_\beta) = 1$. Soit $k \in \mathbb{Z}$, posons $H = \varpi_F^k H_\beta + H^{\tilde{L}}$. Soit $\alpha \in \Sigma(A_{\tilde{M}})$. On peut écrire $\alpha = \sum_{\beta' \in \Delta_{\tilde{P}}} n_{\beta'}\beta'$, avec des coefficients entiers $n_{\beta'}$. Ainsi qu'on l'a déjà dit, on voit en considérant tous les systèmes de racines possibles que ces entiers appartiennent à l'ensemble $\{0, \pm 1, ..., \pm 6\}$. L'hypothèse sur p entraîne que $|n_{\beta'}|_F = 1$ pour tout $\beta' \in \Delta_{\tilde{P}}$. Si $\alpha \in \Sigma^{\tilde{L}}(A_{\tilde{M}})$, on a $n_\beta = 0$ et $\alpha(H) = \alpha(H^{\tilde{L}})$. Si $\alpha \notin \Sigma^{\tilde{L}}(A_{\tilde{M}})$, on a $n_\beta \neq 0$. Considérons $H^{\tilde{L}}$ comme fixé et k comme variable, on a alors $|\alpha(H)|_F = |n_\beta \beta(\varpi_F^k H_\beta)|_F$ si k est assez négatif, donc $|\alpha(H)|_F = -klog(q)$ si k est assez négatif. On en déduit que, pour tout ensemble $\underline{\alpha} = \{\alpha_i; i = 1, ..., n\}$, le terme $u_{\underline{\alpha}}(H)$ est un monôme en k pour k assez négatif, dont le degré est nul si et seulement si tous les α_i appartiennent à $\Sigma^{\tilde{L}}(A_{\tilde{M}})$. Dans ce dernier cas, on a simplement $u_{\underline{\alpha}}(H) = u_{\underline{\alpha}}(H^{\tilde{L}})$. Ainsi $u(H)$ est un polynôme en k pour k assez négatif, dont le terme constant est $u^{\tilde{L}}(H^{\tilde{L}})$. Puisque $u = 0$, le polynôme est identiquement nul. Cela entraîne $u^{\tilde{L}}(H^{\tilde{L}}) = 0$. On a déjà dit que cela permettait de conclure. $\square$

Le lemme permet de définir le terme constant d'un élément de $U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$: c'est sa projection sur le sous-espace $\mathbb{C}$.

4.7 Développement des fonctions $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(., \tilde{K})$ et $s_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(., \tilde{K})$

La proposition 3.2 définit des applications linéaires $\rho_J^{\tilde{G}}$ pour tout $J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. On a

(1) pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{M}(F), \omega)$, le germe en 1 de la fonction

$$a \mapsto r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(a\boldsymbol{\gamma}, \tilde{K})$$

est équivalent à

$$\sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})} \sum_{J \in \mathcal{J}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}} r_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\rho_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}, a)^{\tilde{L}}, \tilde{K}).$$

Il suffit de reprendre la preuve de 3.2. La seule propriété que l'on utilisait des intégrales orbitales ω-équivariantes était la relation 1.7(12). Une relation analogue vaut pour notre fonction $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(., \tilde{K})$ grâce à 4.1(1).

Vu comme fonction de a, chaque terme $r_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\rho_J^{\tilde{L}}(\boldsymbol{\gamma}, a)^{\tilde{L}}, \tilde{K})$ appartient à U_J. On en déduit

(2) pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in D_{géom}(\tilde{M}(F), \omega)$, le germe en 1 de la fonction

$$a \mapsto r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(a\boldsymbol{\gamma}, \tilde{K})$$

est équivalent à un élément de $U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ dont le terme constant est égal à $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \tilde{K})$.

Rappelons que, d'après 3.1(2), cet élément de $U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ est uniquement déterminé.

Supposons $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure.

(3) pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D_{géom}^{st}(\tilde{M}(F))$, le germe en 1 de la fonction

$$a \mapsto s_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(a\boldsymbol{\delta}, \tilde{K})$$

est équivalent à un élément de $U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ dont le terme constant est égal à $s_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \tilde{K})$.

Cela résulte par récurrence de la définition 3.2(4), de (2) ci-dessus et de la propriété évidente suivante : pour $s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}$, on a l'inclusion $U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}(s)} \subset U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$.

On note $\xi : A_{\tilde{M}}(F) \to A_{\tilde{M}'}(F)$ l'homomorphisme naturel. On a

(4) pour tout $\boldsymbol{\delta}' \in D^{st}_{g\acute{e}om}(\mathbf{M}')$, le germe en 1 de la fonction

$$a \mapsto r_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \xi(a)\boldsymbol{\delta}', \tilde{K})$$

est équivalent à un élément de $U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ dont le terme constant est égal à $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}', \tilde{K})$.

Preuve. Soit $\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. Soit $u' \in U_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}$ et v' un germe de fonctions défini presque partout au voisinage de 1 dans $A_{\tilde{M}'}(F)$. Notons u, resp. v, le germe de fonctions $a \mapsto u'(\xi(a))$, resp. $a \mapsto v'(\xi(a))$, défini presque partout sur $A_{\tilde{M}}(F)$ au voisinage de 1. On a

(5) u appartient à $U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ et a même terme constant que u' ;

(6) si v' est équivalent à u', alors v est équivalent à u.

La preuve de (6) est immédiate. Prouvons (5). Par linéarité, il suffit de prouver cette assertion quand u' appartient à un ensemble de générateurs de $U_{\tilde{M}'}^{\tilde{G}'(\tilde{s})}$. On peut donc fixer des éléments linéairement indépendants $\alpha'_1, ..., \alpha'_n$ de $\Sigma^{G'(\tilde{s})}(A_{\tilde{M}'})$ et supposer que u' est la fonction

$$u'(a') = \prod_{i=1,...,n} log(|\alpha'_i(a') - \alpha'_i(a')^{-1}|_F).$$

Identifions <u>*les*</u> paires de Borel épinglées de G et $G'(\tilde{s})$ à des paires de Borel épinglées de ces groupes pour lesquelles M et M' sont standard. On note T et T' les tores de ces paires et θ l'automorphisme habituel qui conserve la paire de Borel épinglée de G. On rappelle que, pour $\beta \in \Sigma(T)$, on note n_β le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $\theta^k(\beta) = \beta$. Notre hypothèse que p est grand implique que tous les entiers n_β sont premiers à p. L'homomorphisme ξ ci-dessus est la restriction d'un homomorphisme encore noté $\xi : T \to T' \simeq T/(1-\theta)(T)$. Pour tout $i = 1, ..., n$, choisissons $\beta'_i \in \Sigma(T')$ dont la restriction à $A_{\tilde{M}}$ soit α'_i. D'après la description déjà utilisée plusieurs fois du système de racines de $G'(\tilde{s})$, il y a une racine $\beta_i \in \Sigma(T)$ de sorte que $\beta'_i \circ \xi$ coïncide sur $T^{\theta,0}$ avec $n_{\beta_i}\beta_i$ ou $2n_{\beta_i}\beta_i$ (en notation additive). Notons α_i la restriction de β_i à $A_{\tilde{M}}$. Alors $\alpha'_i(\xi(a)) = \alpha_i(a)^{m_i}$ pour tout $a \in A_{\tilde{M}}(F)$, avec $m_i = n_{\beta_i}$ ou $m_i = 2n_{\beta_i}$. En tout cas, m_i est un entier premier à p. Mais alors $|\alpha'_i(\xi(a)) - \alpha'_i(\xi(a))^{-1}|_F$ coïncide avec $|\alpha_i(a) - \alpha_i(a)^{-1}|_F$ pour a assez voisin de 1. Le germe de u coïncide donc avec celui de

$$a \mapsto \prod_{i=1,...,n} log(|\alpha_i(a) - \alpha_i(a)^{-1}|_F).$$

Les racines $(\alpha_i)_{i=1,...,n}$ sont encore linéairement indépendantes. D'après les définitions, la fonction ci-dessus appartient à $U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$. Cela prouve la première assertion de (5). Si $n > 0$, les termes constants de u' et de u sont nuls. Si $n = 0$, il est clair que $u = u'$. Cela achève de prouver (5).

Revenons à la preuve de (4). On utilise la définition 4.3(1). Pour tout $\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$, les assertions (3), (5) et (6) impliquent que la fonction

$$a \mapsto s_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\xi(a)\boldsymbol{\delta}', \tilde{K})$$

est équivalent à un élément de $U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ dont le terme constant est $s_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}\boldsymbol{\delta}', \tilde{K})$. On sommant ces résultats sur $\tilde{s}$, on obtient (4). $\square$

4.8 Preuve du théorème 3.4

Pour $a \in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale, l'élément $\xi(a)\boldsymbol{\delta}'$ est combinaison linéaire d'éléments vérifiant les hypothèses de 4.5(3) . Donc

$$r_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\xi(a)\boldsymbol{\delta}',\tilde{K}) = r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(transfert(\xi(a)\boldsymbol{\delta}'),\tilde{K}).$$

On a l'égalité $transfert(\xi(a)\boldsymbol{\delta}') = a\, transfert(\boldsymbol{\delta}')$. D'après les assertions 4.7(2) et (4), les deux membres ci-dessus sont équivalents à des élément de $U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ dont les termes constants sont respectivement $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}',\boldsymbol{\delta}',\tilde{K})$ et $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(transfert(\boldsymbol{\delta}'),\tilde{K})$. Ces éléments de $U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ sont forcément les mêmes d'après 3.1(2). Donc leurs termes constants sont égaux. Cela prouve le théorème.

Bibliographie

[A1] J. Arthur : *The local behaviour of weighted orbital integrals*, Duke Math. J. 56 (1988), p. 223-293

[A2] ——— : *The trace formula in invariant form*, Annals of Math. 114 (1981), p. 1-74

[A3]——— : *The invariant trace formula I. Local theory*, J. AMS 1 (1988), p. 323-383

[A4] ——— : *On the transfer of distributions : weighted orbital integrals*, Duke Math. J. 99 (1999), p. 209-283

[A5] ——— : *On a family of distributions obtained from Eisenstein series II : explicit formulas*, Amer. J. of Math. 104 (1982), p. 1289-1336

[A6]——— : *A stable trace formula I. General expansions*, J. Inst. Math. Jussieu 1 (2002), p. 175-277

[K] R. Kottwitz : *Stable trace formula : cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. 51 (1984), p. 611-650

[KS] ———, D. Shelstad : *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque 255 (1999)

[Lan] R. P. Langlands : *Stable conjugacy : definitions and lemmas*, Can. J. of Math. 31 (1979), p. 700-725

[LS] ———-, D. Shelstad : *On the definition of transfer factors*, Math. Ann. 278 (1987), p. 219-271

[I] J.-L. Waldspurger : *Préparation à la stabilisation de la formule des traces tordue I : endoscopie tordue sur un corps local* , prépublication 2012

[W1] ——— : *La formule des traces locale tordue*, prépublication 2012

[W2]——— : *L'endoscopie tordue n'est pas si tordue*, Memoirs AMS 908 (2008)

[W3]——— : *A propos du lemme fondamental pondéré tordu*, Math. Ann. 343 (2009), p. 103-174

Institut de Mathématiques de Jussieu- CNRS
2 place Jussieu
75005 Paris
e-mail : waldspur@math.jussieu.fr